Université Paris Cité / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI

Systèmes de Communication

Examen de rattrapage (1h30) - 26 juin 2024

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie.*

1 Questions de cours (8 points)

a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?

b) Lors du décodage d'un code en bloc par la méthode du syndrome, que peut-on conclure si celui-ci est égal au vecteur nul ?

c) Lors de la transmission d'un signal NRZ sur un canal à bande passante limitée, pourquoi remplace-t-on les impulsions rectangulaires (fonction porte) par des impulsions en cosinus surélevé ?

d) Qu'est-ce qui permet de séparer le flux binaire d'un utilisateur de ceux des autres dans un multiplexage par code (CDMA) ?

e) Quel est l'intérêt de l'OFDM par rapport à un multiplexage fréquentiel classique ?

f) Sur un canal radio-mobile, qu'est-ce que *l'effet Doppler* et comment se traduit-il sur le signal démodulé ?

g) Dans les systèmes de communications mobiles, le flux binaire issu du codage de source de la parole subit différents niveaux de codage de canal. Par exemple, le GSM ne code qu'une partie des bits (une à deux fois selon la classe), tandis que l'UMTS utilise 5 niveaux de codage. Expliquez ce choix de ne pas coder tous les bits et d'utiliser des niveaux de protection différents pour ceux qui sont codés. Expliquez à quoi sert l'entrelacement des bits qui suit le codage de canal.

2 Exercices

2.1 Codage de source (6 points)

Soit une source binaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(1) = p \ll 1$ (par exemple 1/100) et $\mathrm{P}(0) = 1 - p$. L'entropie de X peut être approchée par : $H(X) \simeq -p \log_2(p)$.

a) On groupe les éléments binaires de X par mots de 3. On appelle X^3 la nouvelle source ainsi constituée. Quelle est l'entropie de X^3 ? Si l'on transmet ces mots directement, combien de bits d'information porte chaque élément binaire ?

mot	probabilité
000	$(1-p)^3$
001	$(1-p)^2 p$
010	$(1-p)^2 p$
011	$(1-p)p^2$
100	$(1-p)^2 p$
101	$(1-p)p^2$
110	$(1-p)p^2$
111	p^3

b) Les probabilités des mots de X^3 sont indiquées selon le tableau ci-contre. Faites un codage de Huffman de la source X^3. (on rappelle que $p \ll 1$)
c) Calculer la longueur moyenne des mots de code avec une approximation au premier ordre en p (c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta p$).
d) Combien de bits d'information porte alors chaque élément binaire ? Comparez l'efficacité à celle de la question a.

2.2 MAQ-16 (6 points)

Les constellations de deux modulations de type MAQ-16 sont représentées sur la figure 1, à rendre avec votre copie. On les note respectivement C_1 et C_2. La seconde est celle utilisée dans la Recommandation V.29 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT) pour les modems à 9600 bit/s.

Lors de l'émission d'un symbole de coordonnées (x, y), on reçoit, après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, un point (z_c, z_s) tel que :

$$\begin{aligned} z_c &= x + b_c \\ z_s &= y + b_s \end{aligned}$$

où b_c et b_s sont des variables aléatoires indépendantes, gaussiennes, centrées, de variance σ^2.

a) Sur la constellation C_1, dessiner les zones de décisions associées aux différents symboles.

On émet le symbole $S_{ij} = (\lambda, 3\lambda)$. Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître ce symbole peut s'exprimer :

$$\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 1 - \mathrm{P}(-\lambda < b_c < \lambda)\mathrm{P}(b_s > -\lambda)$$

Vous prendrez soin de justifier chaque étape de votre calcul.

b) On peut montrer que pour ce symbole, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 3Q(\lambda/\sigma)$, avec :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

Pour les 4 symboles centraux de la constellation, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 4Q(\lambda/\sigma)$. Pour les 4 symboles des coins de la constellation, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 2Q(\lambda/\sigma)$. Pour les 8 autres, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 3Q(\lambda/\sigma)$. En déduire la probabilité d'erreur par symbole P_{eS}, les symboles étant supposés équiprobables (n'oubliez pas de justifier les étapes de votre calcul).

c) De manière générale, la probabilité d'erreur par symbole d'une modulation s'exprime :

$$P_{eS} = K.Q\Big(\frac{d_{min}}{2\sigma}\Big)$$

où d_{min} désigne la distance minimale entre deux symboles et K désigne le nombre moyen de plus proches voisins d'un point de la constellation, c'est-à-dire le nombre moyen de voisins situés à la distance d_{min} de ce symbole.

Exprimer la probabilité d'erreur par symbole pour chacune des deux modulation et vérifier votre résultat de la question b.

d) Les deux modulations ont des puissances respectives $P_1 = 5\lambda^2$ et $P_2 = 27/4$. Pour un débit et une puissance d'émission donnés, la constellation la plus intéressante est celle qui offre la plus faible probabilité d'erreur. Que peut-on conclure ici ?

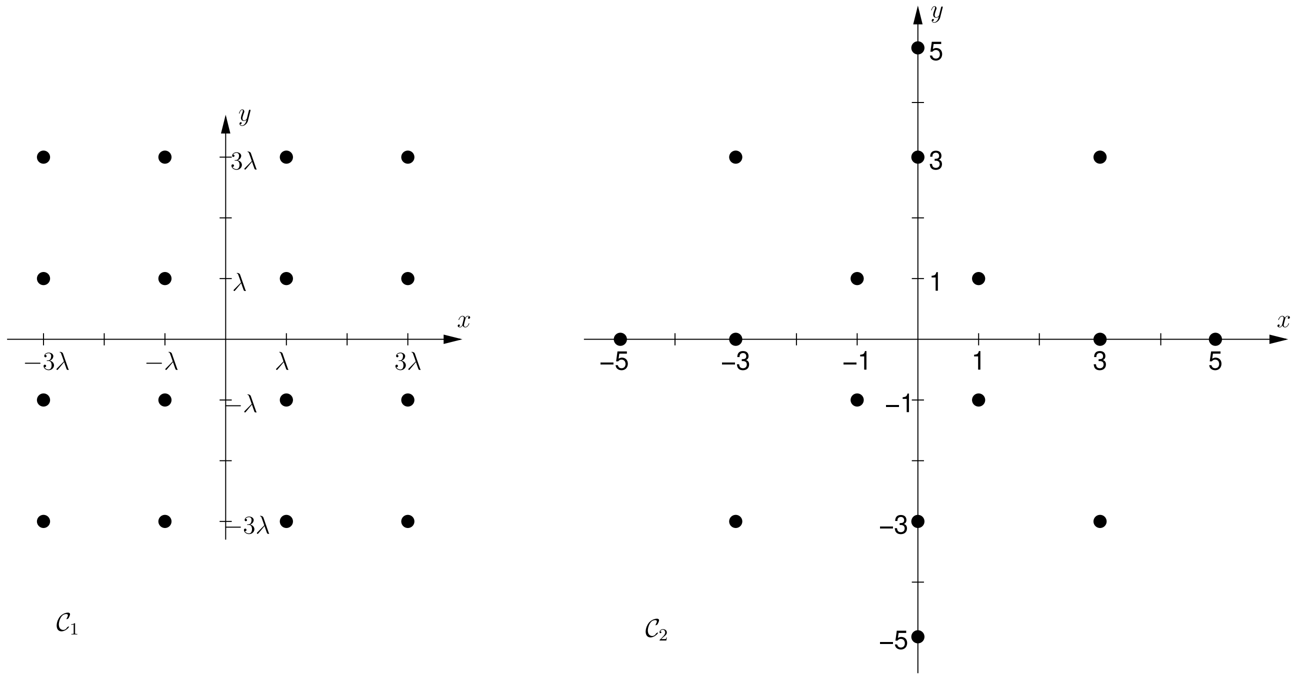

FIGURE 1 – Constellations MAQ-16.

page à rendre avec votre copie

Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

- l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

- l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

- si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

- Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

- L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$