

Systèmes de Communication

Examen de rattrapage (1h30) - 25 juin 2025

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie.

1 Questions de cours (8 points)

- a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?
- b) Lors de la réception d'un message binaire issu d'un codage en bloc, quelles erreurs ne sont pas détectables par le calcul du syndrome ?
- c) Soit un fichier texte constitué de caractères appartenant à un alphabet de taille 256, avec des probabilités d'occurrence très diverses. On peut coder chaque symbole sur 8 éléments binaires, mais on peut aussi utiliser un codage de Huffman. Qu'est-ce que cela change à l'entropie de la source et à la taille du fichier ? (justifier)
- d) Pour atteindre la limite exprimée par le critère de Nyquist sur la transmission sur canal à bande passante limitée, par quelle type d'impulsion faudrait-il remplacer la fonction porte dans l'expression d'un signal NRZ ? Pourquoi n'est-ce pas possible en pratique et quel type d'impulsions utilise-t-on ?
- e) Qu'est-ce qui permet de séparer le flux binaire d'un utilisateur de ceux des autres dans un multiplexage par code (CDMA) ?
- f) Sur un canal radio-mobile, qu'est-ce que *l'effet Doppler* et comment se traduit-il sur le signal démodulé ?
- g) En téléphonie mobile, après le codage de source, pourquoi le codage de canal ne code-t-il pas tous les bits de la même manière ? Pourquoi ajoute-t-on une étape d'entrelacement des bits ?

2 Exercices

2.1 Comparaison MAQ-16 / MDP-16 (6 points)

L'objectif de cet exercice est de comparer les probabilités d'erreur d'une MAQ-16 et d'une MDP-16 pour un même débit et une même énergie par élément binaire.

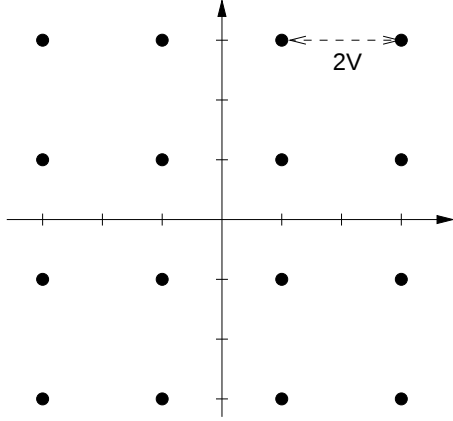


FIGURE 1 – MAQ-16.

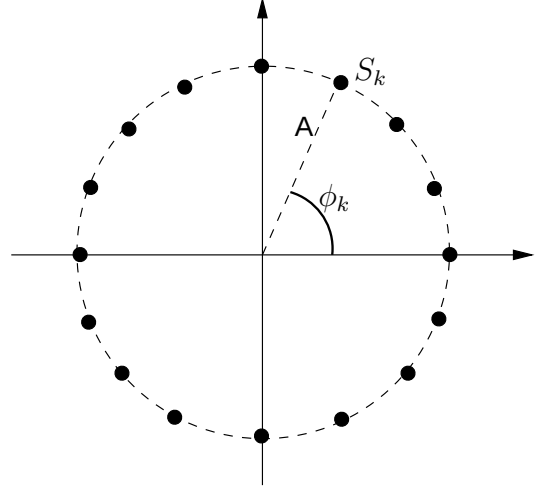


FIGURE 2 – MDP-16.

a) Sur la feuille de réponse en dernière page, indiquez pour chacune des deux constellations le mot binaire porté par chaque symbole, dans le cas d'un codage de Gray. *Ne pas écrire votre nom ou autre signe distinctif sur la feuille de réponse.*

b) Le canal introduit un bruit blanc gaussien centrée de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on obtient, pour chaque symbole émis, un point $M = (z_c, z_s)$ tel que :

— pour la MAQ-16 et pour un symbole $S_{ij} = (Va_i, Vb_j)$,

$$z_c = a_i + b_c$$

$$z_s = b_j + b_s$$

— pour la MDP-16 et pour un symbole $S_k = (A \cos \phi_k, A \sin \phi_k)$,

$$z_c = A \cos \phi_k + b_c$$

$$z_s = A \sin \phi_k + b_s$$

où b_c et b_s sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, de variance $\sigma^2 = N_0/T$, avec T la durée symbole.

Pour la MAQ-16, la probabilité d'erreur par élément binaire vaut :

$$P_{eb} = \frac{3}{4}Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

avec

$$Q : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz$$

On va maintenant calculer la probabilité d'erreur pour la MDP-16. Considérons tout d'abord l'émission du symbole S_0 correspondant à $\phi_0 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} z_c|S_0 &= A + b_c \\ z_s|S_0 &= b_s \end{aligned}$$

La zone de décision associée à S_0 est représentée en grisé sur la figure 3. L'angle de ce secteur angulaire étant faible, cette zone de décision peut être approchée par une bande de plan dans le voisinage de S_0 , comme indiqué sur la figure 4. Si le bruit est modéré, M est dans le voisinage de S_0 .

Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître le symbole S_0 peut s'écrire :

$$P(\overline{R}_0|S_0) = 1 - P\left(-A \sin \frac{\pi}{16} < b_s < A \sin \frac{\pi}{16}\right)$$

Montrer que :

$$P(\overline{R}_0|S_0) = 2Q\left(\frac{A}{\sigma} \sin \frac{\pi}{16}\right)$$

En considérant que les symboles sont équiprobables, en déduire la probabilité d'erreur par symbole puis la probabilité d'erreur par élément binaire.

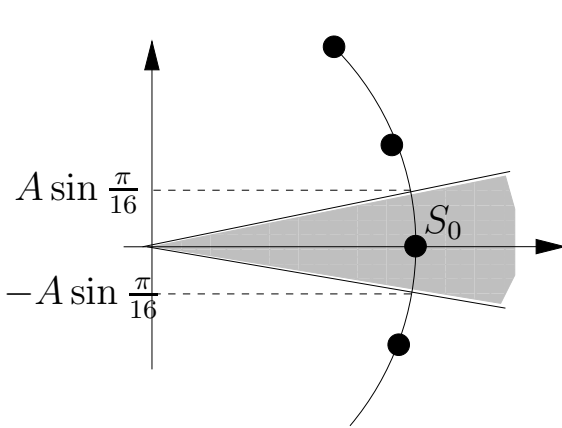


FIGURE 3 – Zone de décision pour le symbole S_0 de la MDP-16.

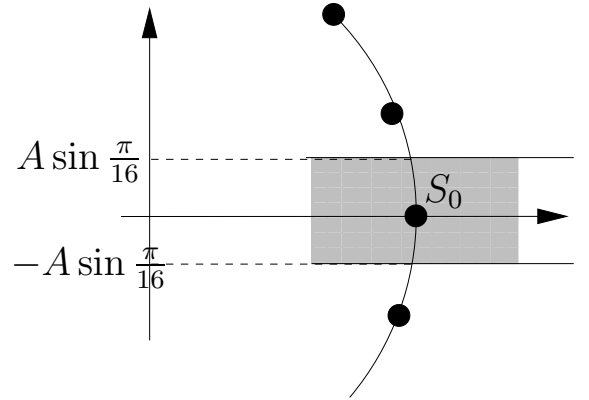


FIGURE 4 – Zone de décision approchée au voisinage de S_0 .

c) L'énergie moyenne par symbole E_S vaut :

- $A^2T/2$ pour la MDP-16 ;
- $5V^2T$ pour la MAQ-16.

On a alors :

$$\text{Pour la MAQ - 16, } P_{eb} = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{5N_0}}\right)$$

$$\text{Pour la MDP - 16, } P_{eb} = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}} \sin \frac{\pi}{16}\right)$$

Sachant que $\sqrt{\frac{1}{5}} \simeq 1,6 \times \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{16}$, à l'aide de la figure 5, comparez les probabilités d'erreur des deux modulations à débit et énergie par élément binaire identiques.

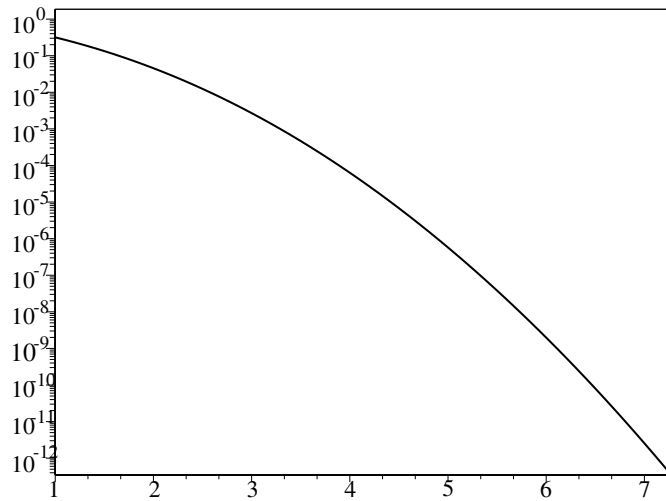


FIGURE 5 – Fonction Q.

2.2 Codage de canal en bloc (6 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoirs de détection et de correction.
- b) Si la matrice génératrice est de la forme $[I_k, P]$, avec I_k la matrice identité de rang k et P une matrice quelconque de dimensions $k \times n$, alors la matrice de contrôle s'écrit $H = [P^\top, I_{n-k}]$. Exprimer H dans notre cas.
- c) On reçoit le mot $r = 010111$. Calculer le syndrome s et conclure.
- d) On reçoit le mot $r = 111011$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

Annexe

Densité de probabilité d'une variable aléatoire X gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Feuille de réponse

Toute feuille portant un nom ou tout autre signe distinctif sera considérée comme nulle.

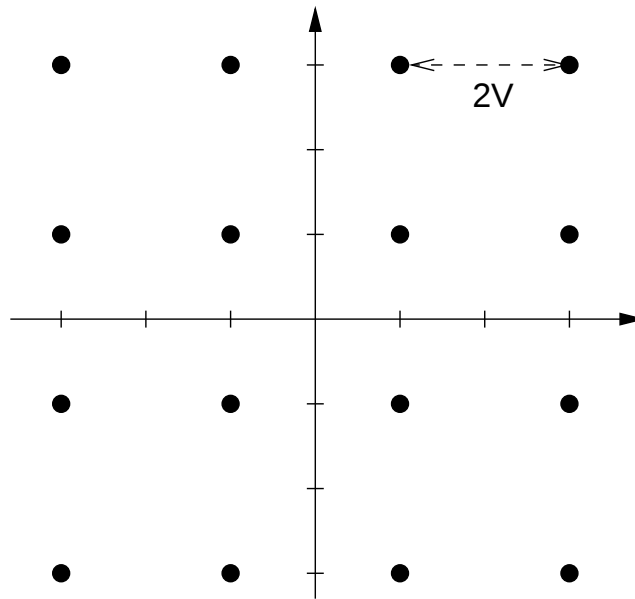


FIGURE 6 – MAQ-16.

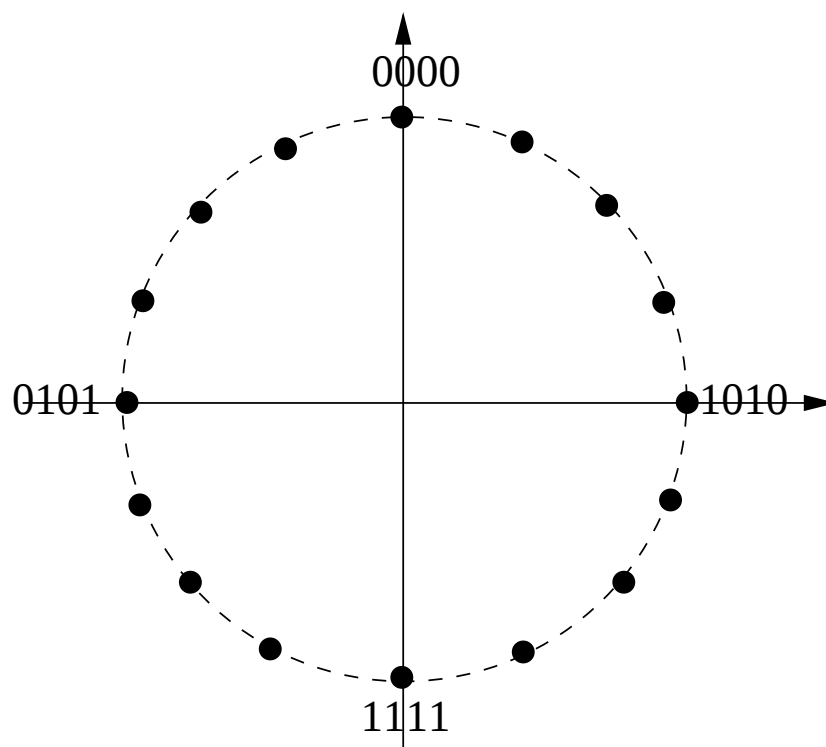


FIGURE 7 – MDP-16.