L3 MIA / Communications Numériques

TD 6 : Transmission sur onde porteuse

1 Modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature (MAQ)

On considère la transmission d'un message binaire par une modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à 2^{2n} états (MAQ-2^{2n}), selon le schéma de la figure ci-dessous.

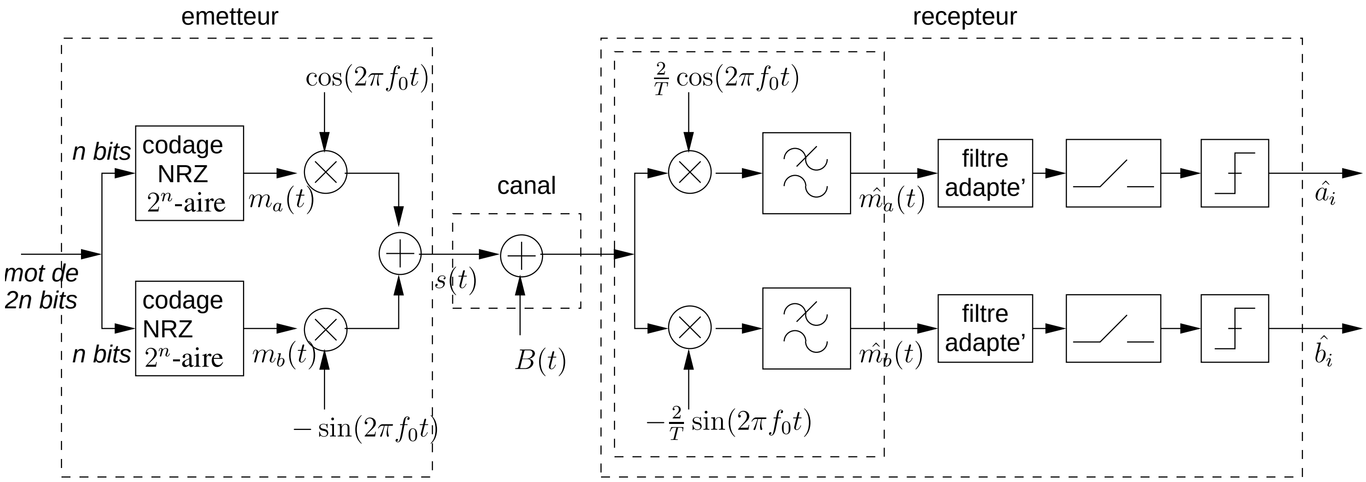

FIG. 1 – Chaîne de communication pour une MAQ.

Le signal émis est désigné par $s(t) = m_a(t)cos(2\pi f_0 t) - m_b(t)sin(2\pi f_0 t)$. Les signaux en bande de base $m_a(t)$ et $m_b(t)$ correspondent respectivement à des suites de symboles $V.a_i h(t)$ et $V.b_j h(t)$ se succédant avec une rapidité de modulation $R = 1/T$. $h(t)$ est une impulsion en cos surélevé. a_i et $b_j \in \{\pm 1; \pm 3; \ldots; \pm(2^n - 1)\}$.

Le canal a une bande passante $2\mathcal{B}$ (centrée sur f_0) suffisante mais introduit un bruit $B(t)$ gaussien centré à bande étroite de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Ce bruit peut s'écrire :

$$B(t) = B_c(t)cos(2\pi f_0 t) - B_s(t)sin(2\pi f_0 t)$$

avec $B_c(t)$ et $B_s(t)$ bruits gaussiens centrés de densité spectrale de puissance N_0 sur $[-\mathcal{B}; \mathcal{B}]$.

1) Calculer le signal à la sortie du multiplieur sur la première voie de réception. Une partie de ce signal provient de l'information émise, l'autre du bruit. Représenter la DSP de chacune de ces parts. Quel est l'effet du filtre passe-bas (de fréquence de coupure f_0 par exemple) qui suit ? Exprimer le signal $\hat{m}_a(t)$ à l'entrée du filtre adapté. Exprimer de même $\hat{m}_b(t)$, le signal à l'entrée du filtre adapté de la deuxième voie de réception.

2) Lorsque l'entrée du filtre adapté est $h(t)$, l'échantillonnage de sa sortie aux instants adéquats donne la valeur T. Lorsque l'entrée est $B_c(t)/T$ (respectivement $B_s(t)/T$), la sortie de l'échantillonneur est une variable aléatoire gaussienne centrée, notée b_c (respectivement b_s), de variance $\sigma^2 = N_0/T$. En déduire la valeur des échantillons z_c (respectivement z_s) prélevés à intervalles T sur la première voie (respectivement la deuxième). Pour $n = 2$, représenter les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(z_c|a_i)$, ainsi que la constellation des points (z_c ;z_s). En déduire intuitivement les zones de décision de chaque symbole.

3 On émet un symbole $S_{ij} = (V.a_i; V.b_j)$ appartenant à l'intérieur de la constellation de la MAQ-2^{2n}. Montrer que la probabilité de ne pas reconnaître ce symbole peut s'exprimer :

$$\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = \mathrm{P}(b_c < -V) + \mathrm{P}(b_c > V) + \mathrm{P}(b_s < -V) + \mathrm{P}(b_s > V)$$

En exploitant le caractère gaussien de b_c et b_s, exprimer $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij})$ à l'aide de la fonction Q :

$$Q : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

On peut montrer de la même manière que pour les symboles de la couronne extérieure de la constellation, sauf les 4 coins, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 3Q(V/\sigma)$. Pour les 4 coins, $\mathrm{P}(\overline{R_{ij}}|S_{ij}) = 2Q(V/\sigma)$. En déduire la probabilité d'erreur par symbole P_e, puis la probabilité d'erreur binaire P_{eb} si l'on utilise un codage de Gray. Pour $n = 2$ (MAQ-16), indiquer sur la constellation quel mot binaire associer à chaque symbole pour effectuer un tel codage.

4) Considérons maintenant une modulation d'amplitude simple à 2^n états (MDA-2^n) : cela revient à ignorer la deuxième voie en émission et en réception. D'après les résultats du TD 3, quelles sont les probabilités d'erreur par symbole et par bit, en fonction de n, V et σ ? En comparant les bandes passantes, débits et probabilités d'erreur binaire, que peut-on en conclure sur l'intérêt de la MAQ par rapport à la MDA ?

2 MDP-8, MDA-8 ou MAQ-8 ?

2.1 MDP-8

Calculer l'énergie par symbole pour une MDP-8 d'amplitude A et de fréquence porteuse f_0, dont la constellation est représentée sur la figure 3. En déduire l'énergie par élément binaire en fonction de A et du débit binaire D.

On pourra utiliser l'approximation suivante : pour $T \gg 1/f_0$ (ce qui est le cas ici),

$$\int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)\mathrm{d}t \simeq T\overline{\cos^2(2\pi f_0 t + \phi)} = \frac{T}{2}$$

2.2 MDA-8

Calculer l'énergie d'un symbole $S_k(t) = V.a_k \cos(2\pi f_0 t)h(t)$ d'une MDA-8, avec $a_k \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 5\}$ (voir figure 2). Calculer l'énergie moyenne par symbole pour une MDA-8. En déduire l'énergie par élément binaire en fonction de V et de D.

2.3 MAQ-8

Soit une modulation MAQ-8 dont la constellation est représentée sur la figure 4. Les symboles sont répartis sur deux cercles, l'un de rayon A, l'autre de rayon λA, avec $\lambda > 1$.

a) Calculer l'énergie moyenne par symbole E_S, en fonction de λ, A et T la durée symbole, puis E_b en fonction de λ, A et D.

b) Calculer la distance d_1 entre deux points voisins sur le premier cercle et la distance d_2 entre un point du premier cercle et un point le plus proche du deuxième. Exprimer ces valeurs en fonction de E_b, λ et D.

La distance minimale entre deux points de la constellation est notée $d_{min} = \min(d_1, d_2)$. La probabilité d'erreur est d'autant plus faible que cette valeur est grande. Pour une énergie E_b donnée, quelle valeur de λ permet de maximiser d_{min} ? Pour trouver cette valeur, on pourra représenter sur la même figure l'allure des variations de d_1^2 et d_2^2 en fonction de λ sur la même figure.

Calculer d_{min} pour cette valeur de λ.

c) Un codage de Gray est-il possible dans ce cas ?

2.4 Comparaison entre les modulations

Pour chaque modulation, exprimer d_{min}^2 en fonction de D et E_b. Pour D et E_b donnés, classer les 3 modulations en fonction de la probabilité d'erreur.

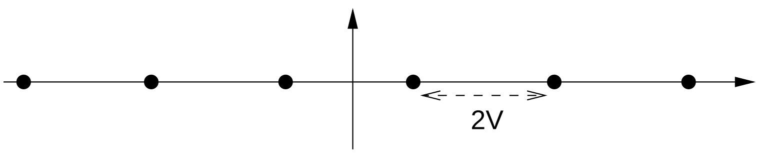

FIG. 2 – MDA-8.

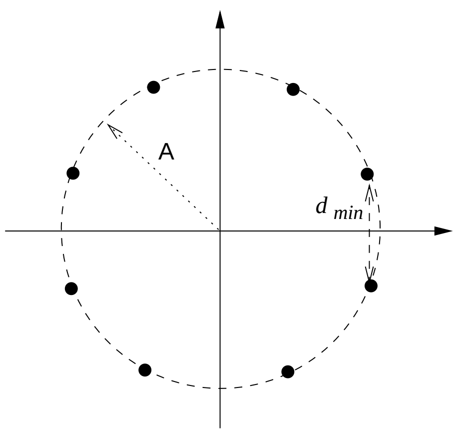

FIG. 3 – MDP-8.

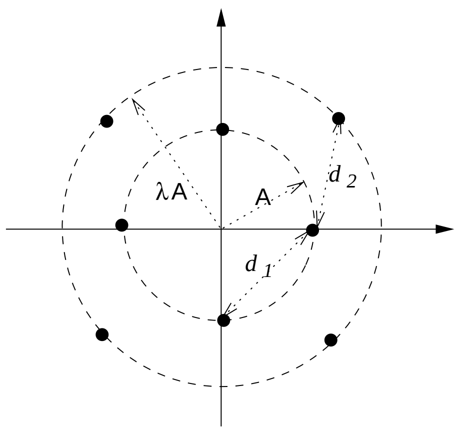

FIG. 4 – MAQ-8.