L3 MIA / Communications Numériques

TD 7 : Codage de canal : codes en blocs

1 Décodage d'un code en blocs linéaire

1) Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(n,k)$, qui à tout mot binaire $m = [m_1, \ldots, m_k]$ associe un mot de code $c = [c_1, \ldots, c_n]$. Le canal introduit une erreur sur un seul bit de c, à la position i. On note cette erreur $e = [0 \ldots 010 \ldots 0]$, le 1 étant placé en i^{eme} position. En notant H la matrice de contrôle du code, montrer que le syndrôme s est égal à la i^{eme} ligne de $H^\top$.

2) Le codage est défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 \\ c_2 &= m_2 \\ c_3 &= m_3 \\ c_4 &= m_1 + m_3 \\ c_5 &= m_1 + m_2 + m_3 \\ c_6 &= m_1 + m_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Quelle est la matrice génératrice G ? On montre que **si $\boldsymbol{G = [I_k, P]}$, alors la matrice de contrôle s'écrit $\boldsymbol{H = [P^\top, I_{n-k}]}$**. Exprimer H dans notre cas.

3) On reçoit le mot $r = 010111$. Calculer le syndrome s. Sous l'hypothèse qu'un seul bit du mot de code c émis a été altéré par la transmission, en déduire ce mot.

4) **On définit le poids de Hamming $\mathrm{P_H}$ d'un mot binaire comme le nombre d'éléments binaires valant 1**. Montrer que pour un code en bloc linéaire de distance de Hamming minimale d_{min} entre deux mots de code différents, $d_{min} = P_H^{min}$ le plus petit poids de Hamming non nul. Indications : $\forall a, b, c$ mots de code,

- $\mathrm{P_H}(a) = \mathrm{d}(a, 0)$;
- $\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(a + c, b + c)$.

5) Construire les mots du code de matrice génératrice G. Quel est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoir de détection et de correction du code.

6) On reçoit le mot 010111. Retrouver le résultat de la question 3 en décodant selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu).

7) On reçoit 111111. Quel est le décodage ?

2 Transformation d'un code en code systématique

Soit un code défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les tailles des mots à coder et des mots de code ?

2) On note L_i la i^{eme} ligne de la matrice G. Par une série de transformations élémentaires du type $L_i + L_j \to L_i$, transformer G en la matrice G' d'un code systématique : $G' = [I_4, P]$, où I_4 désigne la matrice unité de rang 4 et P une matrice binaire de dimensions $4 * 3$.

3) Chaque transformation $L_i + L_j \to L_i$ équivaut à la multiplication matricielle $(I_4 + T_{ij})G$, où T_{ij} est une matrice comportant un 1 à la position (i, j) et des 0 partout ailleurs.

Montrer que l'ensemble des mots de code générés par G' est le même que celui généré par G.

4) Quelle est la matrice de contrôle H ? (*cf.* exercice 1)

5) On reçoit $r = 1000111$. Calculer le syndrôme. Si l'erreur est unique, où est-elle ?