Correction du partiel du 30 mars 2012

2.1 a)

Mots de code	Poids de Hamming	$d^H(r,c)$
000 000	0	5
001 111	4	3
010 101	3	4
011 010	3	2
100 110	3	4
101 001	3	2
110 011	4	1
111 100	4	3

$d^H_{min} = P^H_{min} = 3$

$\rightarrow$ pouvoir de détection $= d_{min} - 1 = 2$

correction $= \left[\frac{d_{min}-1}{2}\right] = 1$

b) Les distances entre r et les mots de code sont indiquées dans la 3e colonne du tableau

Le mot le plus proche est 110 011

Le décodage est fiable car la distance correspond au pouvoir de correction.

2.2 Codage de source

a) $H(x) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$

$$\simeq -p\,(\underbrace{\log_2 p - \ln 2}_{\sim \log_2 p \text{ pour } p \ll 1})$$

$$\simeq -p\log_2 p$$

b)

Mot	probabilité
00	$(1-p)^2$
01	$p(1-p)$
10	$p(1-p)$
11	p^2

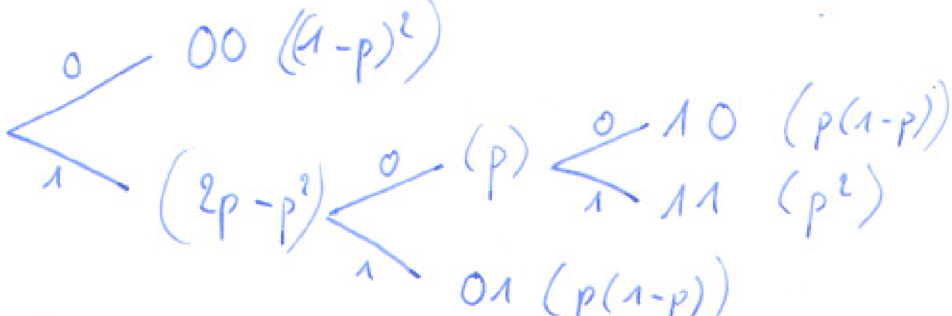
La source étant sans mémoire,
2 éléments binaires successifs sont indépendants,
donc $P(ij) = P(i)P(j)$

L'entropie est l'information moyenne par symbole. Si l'on groupe 2 symboles indépendants en 1 seul, on double donc l'info moyenne par symbole.

$$H(X^2) = 2H(X) \sim -2p\log_2 p$$

Codage de Huffman de X^2 :

Comme $p \to 0$, $p^2 < p(1-p) < (1-p)^2$



On a donc le codage suivant :

$00 \to 0$

$01 \to 11$

$10 \to 100$

$11 \to 101$

Longueur moyenne des mots de code :

$L = \sum_i p(x_i)\, n_i$ avec x_i le i ème symbole, n_i sa longueur

$= (1-p)^2 + 2p(1-p) + 3p(1-p) + 3p^2$

$= 1 + 3p - p^2$

Efficacité : $\eta_2 = \dfrac{H(X^2)}{L} = \dfrac{-2p\log_2 p}{1+3p-p^2}$

Dans a), $\eta = -p\log_2 p$

Comme $p \to 0$, $\eta_2 \simeq 2 \times \eta$: efficacité doublée !

2.3 Détection de symboles

a) $P(r_0 \mid s_1) = P(z < 0 \mid s_1)$

$= P(z = -1 \text{ ou } -3 \mid s_1)$

$= P(z = -1 \mid s_1) + P(z = -3 \mid s_1)$

(événements disjoints)

$= \beta$

$P(r_1 \mid s_0) = P(z > 0 \mid s_0)$

$= \beta$

b) $e = \{ (s_0, r_1) ; (s_1, r_0) \}$

$P_e = P(s_0 \cap r_1) + P(s_1 \cap r_0)$

(événements disjoints)

$= P(r_1 \mid s_0) P(s_0) + P(r_0 \mid s_1) P(s_1)$

$= \beta \, (P(s_0) + P(s_1))$

$= \beta$