M1 informatique : Traitement du signal et des images

Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

5 novembre 2012

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

1.1 Signaux 1D (5 points)

a) Qu'est-ce qui différencie le spectre d'un signal périodique du spectre d'un signal apériodique d'énergie finie ?

b) Soit un filtre analogique de réponse impulsionnelle $h(t)$. Pourquoi peut-on dire que la réponse du système à l'impulsion de Dirac retardée de θ, $\delta(t-\theta)$, vaut $h(t-\theta)$? Donnez un exemple de système pour lequel cela n'est pas vrai.

c) Définir la réponse fréquentielle d'un filtre. Quel est son intérêt par rapport à la réponse impulsionnelle ?

d) Enoncez le théorème de Shannon.

e) Pourquoi représente-t-on le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence ν_e uniquement entre $-\nu_e/2$ et $\nu_e/2$?

1.2 Images (5 points)

a) Quelles sont les étapes qui permettent de passer d'un signal 2D analogique à une image numérique ?
NB : La réponse devra être clairement rédigée (description du principe, conséquences au niveau de l'image numérique produite)

b) Donnez la définition mathématique d'une image numérique.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Image (3 points)

Sur la figure ci-jointe, retrouvez les histogramme et histogramme cumulé normalisé correspondant à chaque image.

En sachant que l'image originale est l'image A, que pouvez-vous dire sur le type de traitement effectué à partir de l'image originale pour obtenir les images B et C ?

NB : La réponse devra être clairement rédigée, et justifiée

2.2 Cryptage du son (3 points)

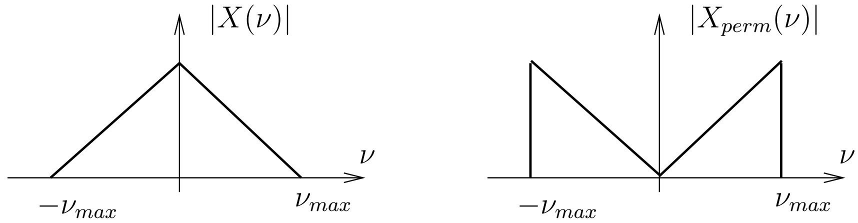
On souhaite réaliser un système de cryptage du son proche de celui utilisé par Canal+ : pour un signal de spectre borné, il s'agit de permuter la partie positive et la partie négative du spectre, comme indiqué sur la figure 1. Le son devient alors incompréhensible et peut être décrypté par l'opération inverse.

On rappelle que pour tout signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(\nu)$,

$$\text{TF}[x(t)cos(2\pi\nu_0 t)] = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}X(\nu + \nu_0)$$

a) En multipliant le signal par une sinusoïde puis en filtrant le résultat par un filtre passe-bas, on peut réaliser la permutation fréquentielle représentée sur la figure 1. Expliquer comment, en illustrant votre explication par des figures.

b) Comment alors décrypter le son ?



Spectre d'amplitude du signal original *Spectre d'amplitude du signal crypté*

FIGURE 1 – Permutation spectrale.

2.3 Système dynamique (3 points)

Le circuit résistance-inductance de la figure 2, alimenté par la tension $x(t)$, est un système dynamique d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, régi par l'équation suivante :

$$y'(t) + \frac{R}{L}y(t) = x'(t)$$

a) Donner la réponse fréquentielle $H(\nu)$ de ce filtre.

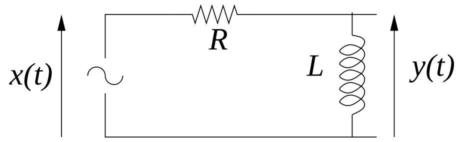


FIGURE 2 – Circuit RL.

b) Calculer son module $|H(\nu)|$ et le mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{b\nu})^2}}$$

De quel type de filtre s'agit-il ?

2.4 Echantillonnage (2 points)

Un signal sinusoïdal de fréquence 1500 Hz est échantillonné à 2000 Hz. Expliquez pourquoi on le perçoit alors comme ayant une fréquence de 500 Hz. Vous illustrerez votre explication par des figures.

3 Formulaire

Transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] &= TF[x(t)].TF[y(t)] \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu-\nu_0) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] &= (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu) \\
\delta(t) &= \mathrm{TF}^{-1}[1] \\
\delta(\nu) &= \mathrm{TF}[1] \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu-\nu_0)
\end{aligned}$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Convolution :

$$x * y = y * x$$
$$x * \delta = x$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t - \theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

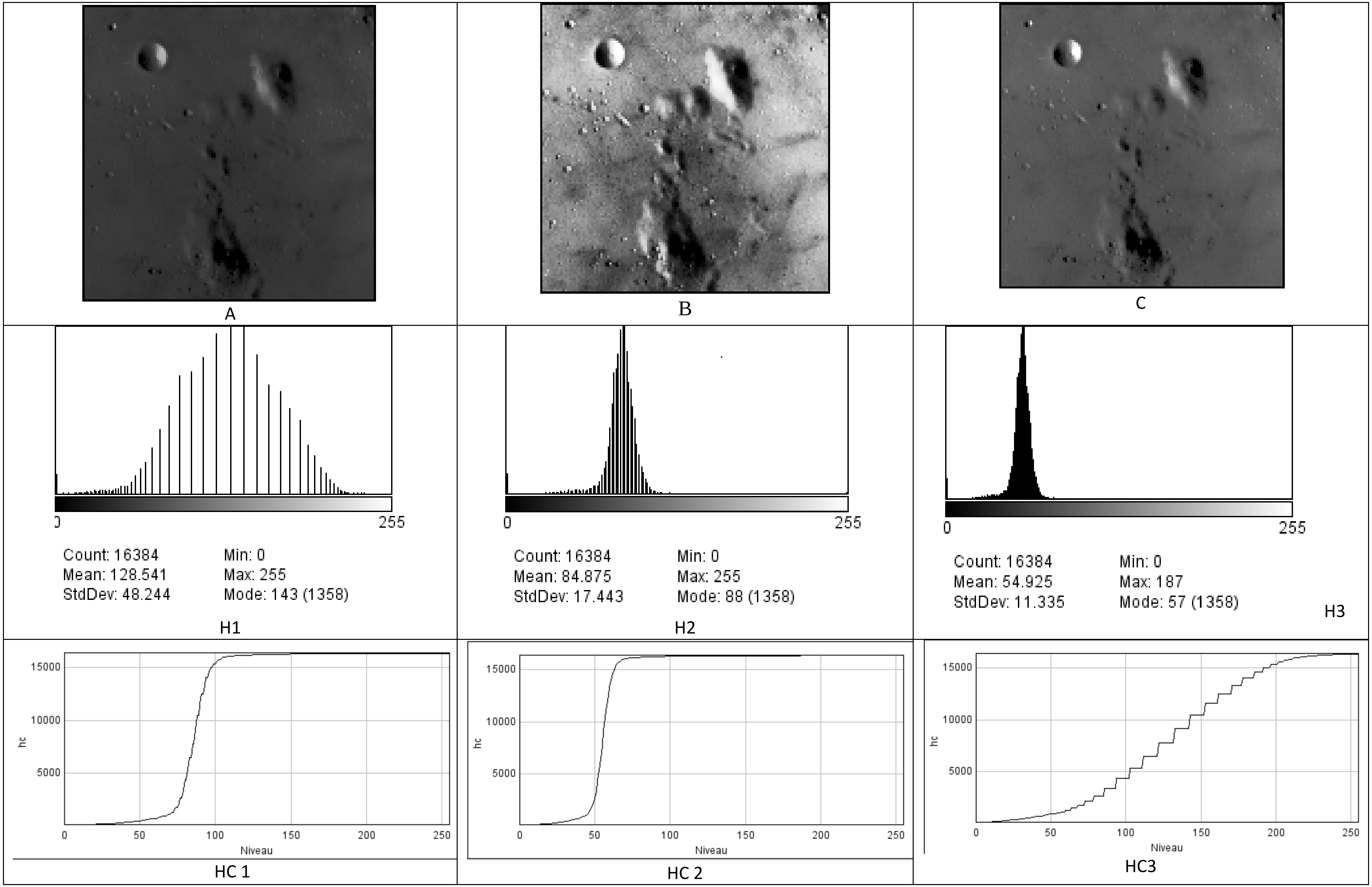

A
B
C
0
255
Count: 16384
Mean: 128.541
StdDev: 48.244
Min: 0
Max: 255
Mode: 143 (1358)
H1
0
255
Count: 16384
Mean: 84.875
StdDev: 17.443
Min: 0
Max: 255
Mode: 88 (1358)
H2
0
255
Count: 16384
Mean: 54.925
StdDev: 11.335
Min: 0
Max: 187
Mode: 57 (1358)
H3
hc
15000
10000
5000
0
50
100
150
200
250
Niveau
HC 1
HC 2
HC3

Figure 1