M1 informatique : Traitement du signal et des images

Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

2 novembre 2015

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les 5 sous-parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Signaux 1D (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement rédigées et justifiées.

a) Soit le spectre d'amplitude représenté sur la figure 1, nul en dehors de l'intervalle $[0; \nu_0]$.
- Pourquoi ne peut-il être celui d'un signal réel ?
- Pourquoi ne peut-il être celui d'un signal échantillonné ?

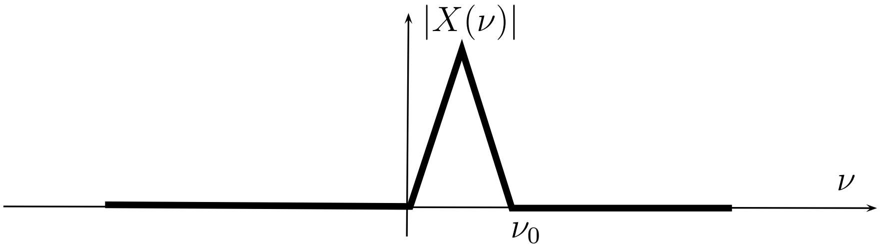

FIGURE 1 – Un étrange spectre d'amplitude.

b) La figure 2 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois spectres d'amplitude a, b et c (ligne du bas). Associez chaque spectre à un signal temporel, en expliquant vos choix.

c) Lorsqu'on observe un signal périodique et que l'on calcule son spectre, pourquoi est-il impossible d'obtenir exactement un spectre de raies ?

d) Enoncez le théorème de Shannon.

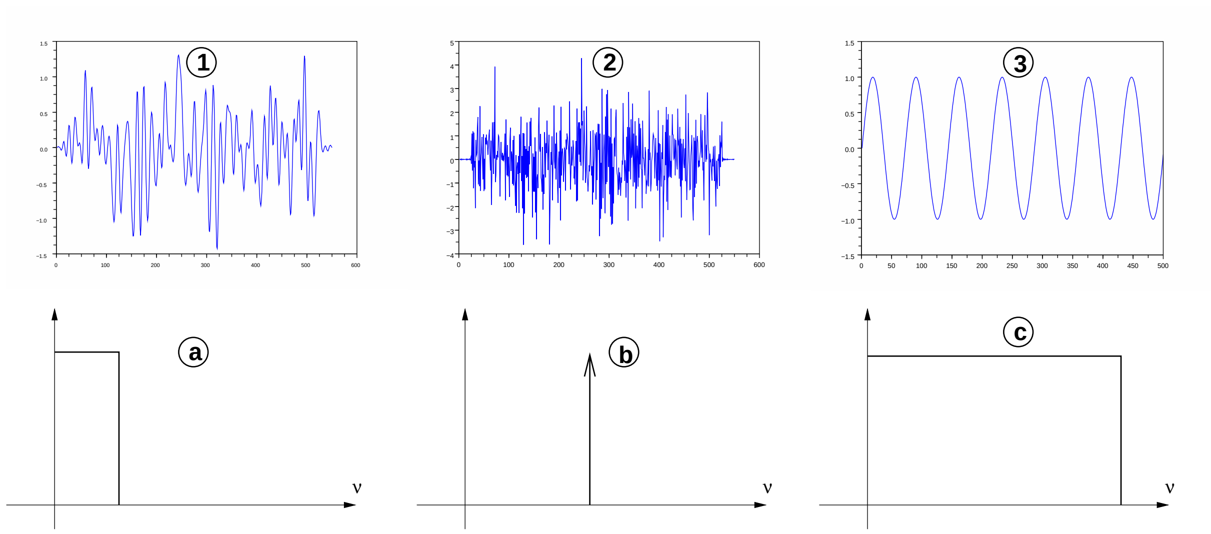

FIGURE 2 –

e) Soit un signal analogique x de spectre à support borné par ± 8 kHz. Ce signal est échantillonné à 32 kHz. Soit x_e le signal échantillonné. En ne conservant qu'un échantillon sur deux de x_e, perd-on de l'information ? (justifier)

1.2 Questions de cours Image (4 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

a) Quelles sont les deux étapes sur lesquelles repose l'acquisition d'image ? (donnez une définition de ces deux étapes, ainsi que les caractéristiques de l'image qui sont liées à ces étapes)

b) Après avoir donné la définition du phénomène d'Aliasing, indiquez à quelle étape est lié ce phénomène.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice Image (3 points)

Sur la figure en annexe, mettre en correspondance chaque image 1, 2, 3 avec son histogramme et son histogramme cumulé. Justifier vos réponses.

Si l'image 1 est l'image originale, quelles transformations d'histogramme ont été appliquées sur cette image originale pour obtenir les deux autres images ? Justifier votre réponse.

2.2 Transmission par modulation de porteuse (4 points)

On transmet un signal $m(t)$, dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 3, par modulation d'une porteuse $p(t) = 2\cos(2\pi\nu_0 t)$ de fréquence ν_0 nettement supérieure à la fréquence maximale ν_{max}. Le signal transmis est : $s(t) = m(t)p(t)$.

a) Dessinez le spectre d'amplitude de s (la démonstration mathématique n'est pas demandée).

b) On suppose que le signal s est reçu sans altération. En réception, on le multiplie par $p/2$, on obtient alors un signal x dont le spectre, représenté en module sur la figure 4, vaut :

$$X(\nu) = M(\nu) + \frac{1}{2}M(\nu - 2\nu_0) + \frac{1}{2}M(\nu + 2\nu_0),$$

où $M(\nu)$ désigne la transformée de Fourier de $m(t)$.
- Démontrez cette expression.
- Comment peut-on récupérer le signal d'information m à partir de x ?

c) Supposons que l'on veuille transmettre par modulation, sur le même canal, un autre signal $m'(t)$ dont le spectre s'étend également de $-\nu_{max}$ à ν_{max}. Comment faire pour ne pas avoir d'interférence entre les deux signaux émis et comment récupérer, en réception, chaque signal (m et m') séparément ? Dessinez le schéma de principe de votre proposition.

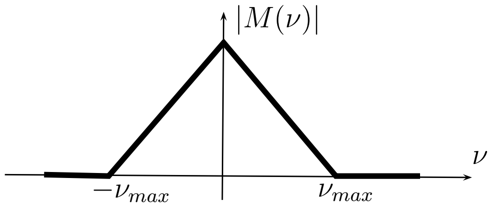

FIGURE 3 – Spectre d'amplitude du modulant.

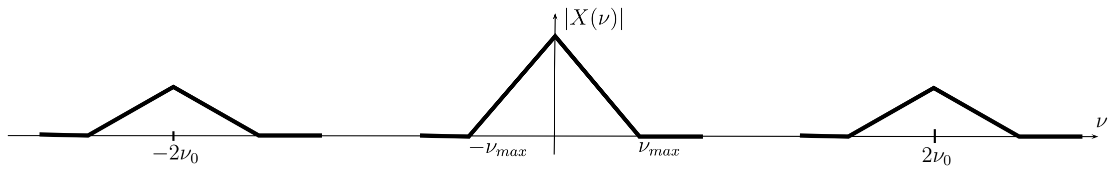

FIGURE 4 – Spectre d'amplitude du signal $x(t) = s(t)p(t)$.

2.3 Echantillonnage (3 points)

Un signal sinusoïdal de fréquence 1500 Hz est échantillonné à 2000 Hz. Expliquez pourquoi, lorsqu'on l'envoie sur une carte son, on le perçoit alors comme ayant une fréquence de 500 Hz. Vous illustrerez votre explication par des figures.

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$
$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$
$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu-\nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2\mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2|S(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$