M1 informatique : Traitement du signal et des images

Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

9 novembre 2016

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les 5 sous-parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Signaux 1D (5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement rédigées et justifiées.

a) Soit un signal réel $x(t)$ dont le spectre est représenté ci-dessous. Pourquoi est-ce impossible ?

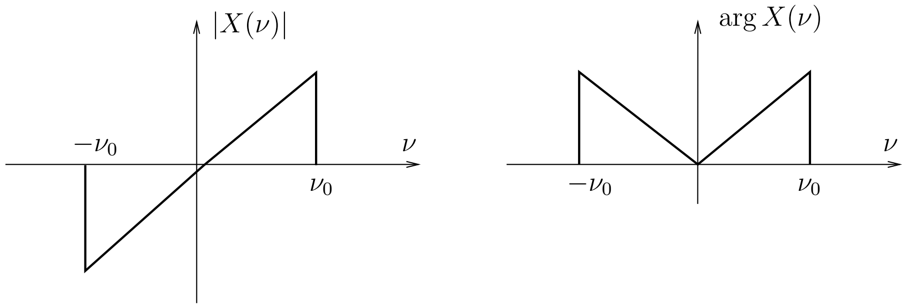

FIGURE 1 – Spectre de $x(t)$.

b) Qu'est-ce qui différencie le spectre d'un signal analogique périodique de celui d'un signal analogique apériodique d'énergie finie ?

c) Soit une fonction de la fréquence $X(\nu)$, non nulle sur un intervalle $[-B; B]$ et qui s'annule pour toute fréquence $\nu > B$ ou $\nu < -B$. Pourquoi cette fonction ne peut-elle être le spectre d'un signal échantillonné ?

d) On peut reconstruire parfaitement un signal $s(t)$ à partir de sa version échantillonnée $s[n]$ selon la formule :

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \mathrm{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n)$$

Pourquoi cette formule est-elle difficilement utilisable en pratique ?

e) Qu'appelle-t-on la *réponse impulsionnelle* d'un filtre ?

1.2 Questions de cours Image (4 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

a) Quelles sont les étapes qui permettent de passer d'un signal 2D analogique en une image numérique ? (description du principe, conséquences au niveau de l'image numérique produite)

b) Donnez la définition mathématique d'une image numérique.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice Image (3 points)

Sur la figure en annexe, retrouvez les histogramme et histogramme cumulé normalisé correspondant à chaque image.

En sachant que l'image originale est l'image A, que pouvez-vous dire sur le type de traitement effectué à partir de l'image originale pour obtenir les images B et C ? Justifier votre réponse.

2.2 Transmission par modulation de porteuse (4 points)

On transmet un signal $m(t)$, dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 2, par modulation d'une porteuse $p(t) = 2\cos(2\pi\nu_0 t)$ de fréquence ν_0 nettement supérieure à la fréquence maximale ν_{max}. Le signal transmis est : $s(t) = m(t)p(t)$.

a) Dessinez le spectre d'amplitude de s, puis démontrez théoriquement ce résultat, c'est-à-dire montrez que la transformée de Fourier de s vaut :

$$S(\nu) = M(\nu - \nu_0) + M(\nu + \nu_0)$$

où $M(\nu)$ désigne la transformée de Fourier de m.

b) On suppose que le signal s est reçu sans altération. En réception, on le multiplie par $p/2$, on obtient alors un signal x dont le spectre vaut :

$$X(\nu) = M(\nu) + \frac{1}{2}M(\nu - 2\nu_0) + \frac{1}{2}M(\nu + 2\nu_0),$$

— Dessinez le spectre d'amplitude $|X(\nu)|$.
— Comment peut-on récupérer le signal d'information m à partir de x ?

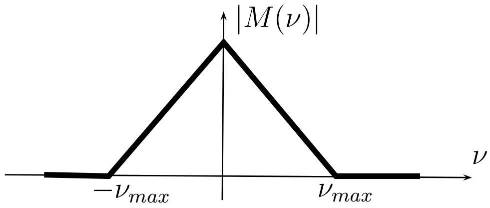

FIGURE 2 – Spectre d'amplitude du modulant.

2.3 Echantillonnage (4 points)

Soit un signal $x(t)$ constitué de deux sinusoïdes de fréquences respectives $\nu_1 = 100$ Hz et $\nu_2 = 400$ Hz :

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t)$$

a) Dessinez le spectre d'amplitude de x (sans vous préoccuper des valeurs exactes en ordonnée).

b) On échantillonne x à la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = 600$ Hz. Dessinez le spectre du signal échantillonné, entre -1 kHz et +1 kHz.

c) On reconstruit un signal analogique à partir de ce signal échantillonné.
- Dessinez le spectre d'amplitude du signal obtenu.
- Donnez l'expression du signal temporel.
- Expliquez pourquoi on ne retrouve pas le signal original $x(t)$. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$
$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$
$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu-\nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2\mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$