M1 informatique : Traitement du signal et des images

Epreuve de contrôle continu - Durée : 1h30

10 novembre 2017

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les 5 sous-parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

Vous trouverez des formules éventuellement utiles en annexe.

1 Questions de cours

1.1 Signaux 1D (4 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement rédigées et justifiées.

a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse.

b) Pourquoi un signal bref (un claquement, par exemple) ne peut-il avoir un spectre étroit ? Quelle est la largeur minimale de son spectre ?

c) Soit une fonction de la fréquence $X(\nu)$, non nulle sur un intervalle $[-B; B]$ et qui s'annule pour toute fréquence $\nu > B$ ou $\nu < -B$. Pourquoi cette fonction ne peut-elle être le spectre d'un signal échantillonné ?

d) Soit un signal analogique x de spectre à support borné par ± 8 kHz. Ce signal est échantillonné à 32 kHz. Soit x_e le signal échantillonné. En ne conservant qu'un échantillon sur deux de x_e, perd-on de l'information ? (justifier)

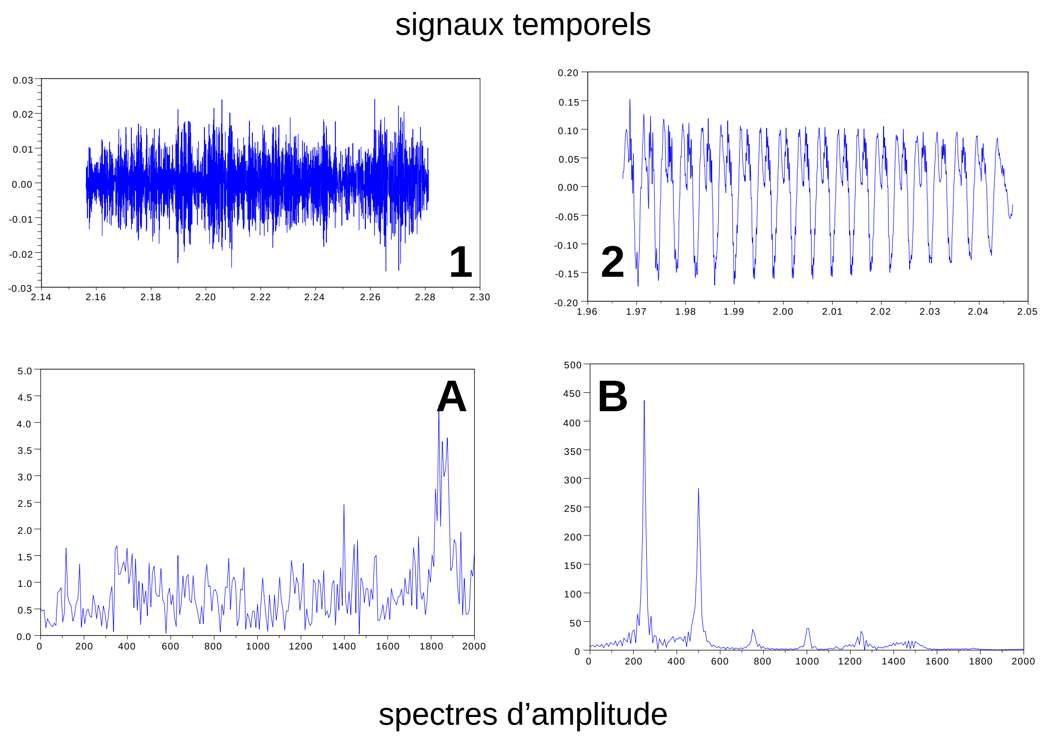

FIGURE 1 – Appariement signal / spectre.

1.2 Questions de cours Image (3,5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement rédigées et justifiées si nécessaire.

a) Quels sont les deux processus sur lesquels repose l'acquisition d'image ?

b) Montrez le lien entre ces deux processus et les notions de résolution spatiale et tonale de l'image.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice Image (3,5 points)

a) Après avoir rappelé la définition d'histogramme et d'histogramme cumulé normalisé, retrouver pour chaque image de la figure suivante la correspondance entre image, histogramme, et histogramme cumulé normalisé.

b) Si on suppose que l'image originale est l'image A, à votre avis quel traitement a été utilisé pour obtenir l'image C ?

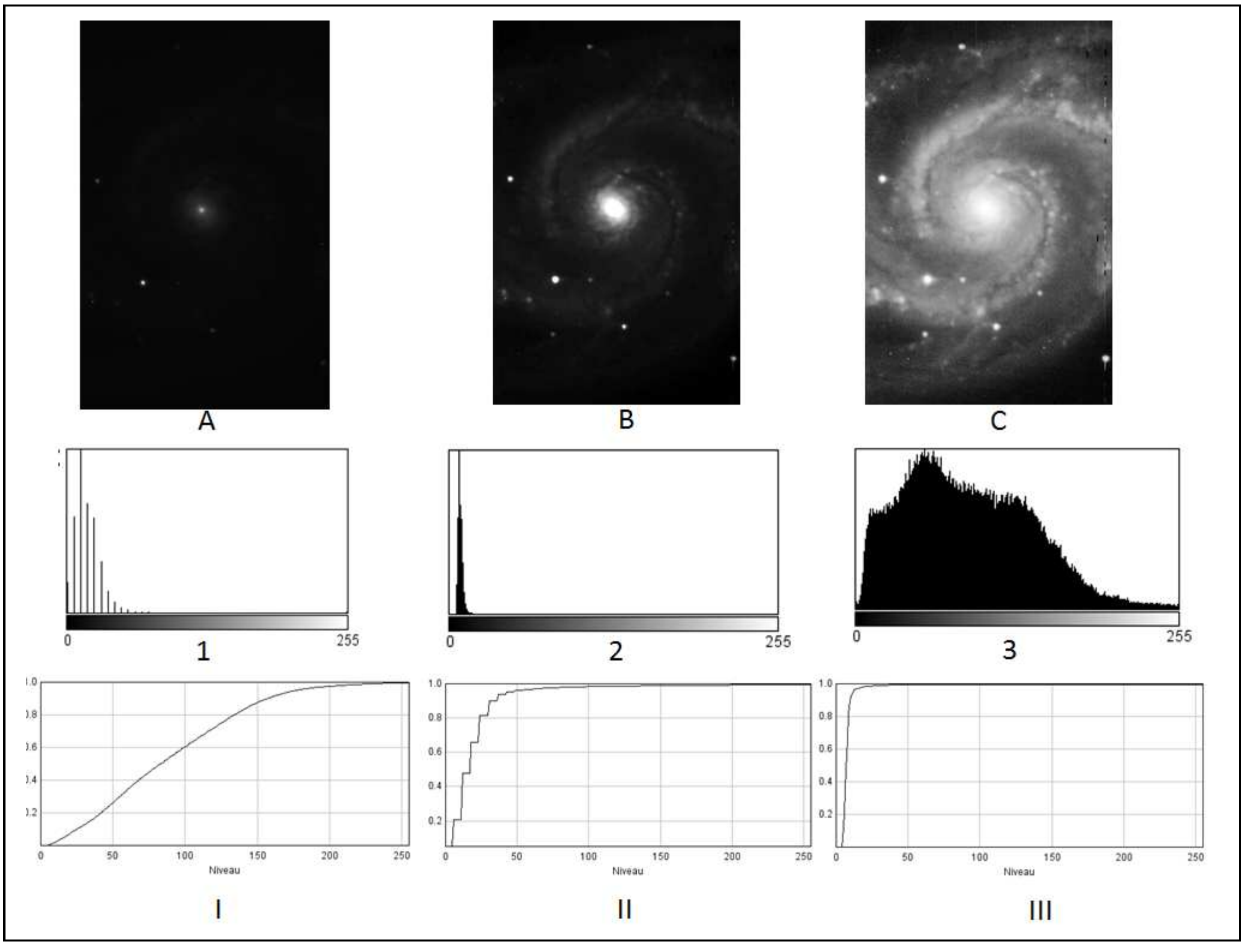

FIGURE 2 – Quizz : Images, Histogrammes et Histogrammes cumulés normalisés.

2.2 Échantillonnage (4,5 points)

Lorsqu'un son est composé de sinusoïdes à des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale ν_0, ce son est dit harmonique et sa hauteur perçue dépend uniquement de ν_0 : le son est grave si ν_0 est faible, aigu si ν_0 est élevé.

Soit un signal sonore $x(t)$ constitué de 4 sinusoïdes de fréquences respectives $\nu_1 = 200$ Hz, $\nu_2 = 400$ Hz, $\nu_3 = 600$ Hz et $\nu_4 = 800$ Hz :

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t) + \cos(2\pi\nu_3 t) + \cos(2\pi\nu_4 t)$$

On échantillonne x à la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = 900$ Hz, puis on reconstruit un signal analogique $x_R(t)$ à partir du signal échantillonné x_e. Lorsqu'on écoute x et x_R, x_R semble nettement plus grave que x.

Expliquez ce phénomène, en décrivant de manière précise (par des figures, des explications, des formules commentées, des théorèmes...) ce qui s'est passé à chaque étape.

2.3 Transmission par modulation de porteuse (4,5 points)

On transmet un signal $m(t)$, dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 3, par modulation d'une porteuse $p(t) = 2\cos(2\pi\nu_0 t)$ de fréquence ν_0 nettement supérieure à la fréquence maximale ν_{max}.

Le signal transmis est : $s(t) = m(t)p(t)$. Son spectre, défini par la transformée de Fourier, vaut :

$$S(\nu) = M(\nu - \nu_0) + M(\nu + \nu_0),$$

où $M(\nu)$ désigne le spectre de $m(t)$.

En réception, on suppose que le signal émis n'a subi ni altération ni retard sur la liaison. On reçoit donc $s(t)$, que l'on multiplie par $p'(t) = \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$.

a) On suppose dans un premier temps que $\phi = 0$. On a donc :

$$x(t) = s(t)p'(t) = 2m(t)\cos(2\pi\nu_0 t)^2 = m(t)(1 + \cos(4\pi\nu_0 t))$$

— Démontrez que le spectre de $x(t)$ vaut :

$$X(\nu) = M(\nu) + \frac{1}{2}M(\nu - 2\nu_0) + \frac{1}{2}M(\nu + 2\nu_0),$$

— Dessinez le spectre d'amplitude $|X(\nu)|$.
— Comment peut-on récupérer le signal d'information m à partir de x ?

b) Si $\phi \neq 0$, que se passe-t-il ? Quel résultat particulier a-t-on si $\phi = \pi/2$? (il n'est pas demandé de démonstration)

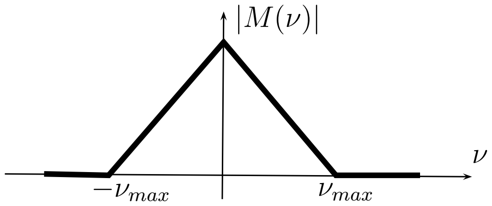

FIGURE 3 – Spectre d'amplitude du modulant.

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$
$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$
$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu-\nu_0)$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$