

# M1 info : Bases du Traitement du Signal et des Images

## Examen final - Durée : 2h

10 janvier 2013

*Documents, calculatrices et téléphones interdits.*

*Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.*

### 1 Questions de cours

*Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.*

#### 1.1 Signal (4 points)

- a) Pourquoi représente-t-on généralement la réponse fréquentielle d'un filtre numérique sur l'intervalle de fréquences normalisées  $[0; 1/2]$  et pas  $[-\infty; \infty]$  ?
- b) Lors de l'analyse fréquentielle d'un signal numérique, pourquoi multiplie-t-on une séquence de signal par une fenêtre de pondération (fenêtre triangulaire, de Hamming...)?
- c) Comment peut-on améliorer la résolution fréquentielle d'une analyse spectrale numérique ?
- d) Soient un signal discret  $x$  de durée finie  $N$  et un filtre de réponse impulsionnelle  $h$  de longueur  $N$ . Quel signal a pour Transformée de Fourier Discrète (TFD) :  $\text{TFD}[h]\text{TFD}[x]$  ? Comment faire pour que  $\text{TFD}[h]\text{TFD}[x] = \text{TFD}[h \star x]$  ? ( $\star$  désignant le produit de convolution linéaire)

#### 1.2 Image (3 points)

- a) Quelles sont les trois grandes catégories de transformation d'images ? Décrivez le principe général pour chacune de ces catégories.
- b) Donnez un exemple de transformation dans chacune des trois catégories.

## 2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

### 2.1 Echantillonnage (4,5 points)

Soient les signaux

$$\begin{aligned}x(t) &= \text{sinc}^2(\pi\nu_0 t) \\ y(t) &= \nu_0 \text{sinc}(\pi\nu_0 t)\end{aligned}$$

Les transformées de Fourier de ces signaux sont des fonctions réelles de la fréquence, représentées respectivement sur les figures 1 et 2.

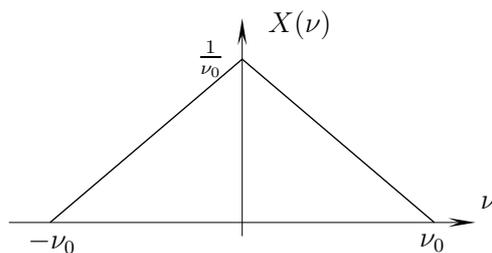


FIG. 1 – Spectre de  $x(t)$ .

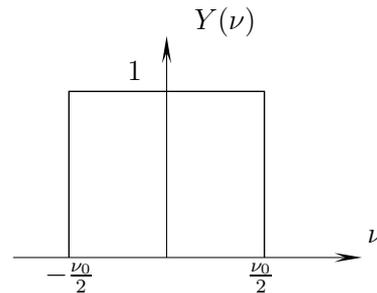


FIG. 2 – Spectre de  $y(t)$ .

- a) On échantillonne  $x(t)$  à une fréquence  $\nu_e$ . Représenter le spectre du signal échantillonné,  $X_e(\nu)$ , pour  $\nu_e = \nu_0$  et pour  $\nu_e = 3\nu_0$ . Commentez.
- b) On cherche à reconstruire  $x(t)$  à partir de sa version échantillonnée par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure  $\nu_e/2$ . Donner l'expression du signal reconstruit  $\tilde{x}(t)$  pour  $\nu_e = \nu_0$  et pour  $\nu_e = 3\nu_0$ .

Source : Jean-Yves Tournet, ENSEEIHT, janvier 2010

### 2.2 Analyse d'un filtre numérique (4,5 points)

- a) Donner l'équation aux différences du filtre représenté sur la figure 3. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?
- b) Calculez la fonction de transfert  $H(z)$  du filtre.
- c) Tout polynôme de la forme  $P(z) = z^2 - 2\rho \cos(\theta)z + \rho^2$  peut s'écrire :  $P(z) = (z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta})$ . Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessinez le diagramme pôles-zéros dans le cas où  $A = B = 0.9$ ,  $\alpha = \pi/3$  et  $\beta = 2\pi/3$ .
- d) Esquissez le module de la réponse fréquentielle dans ce cas.

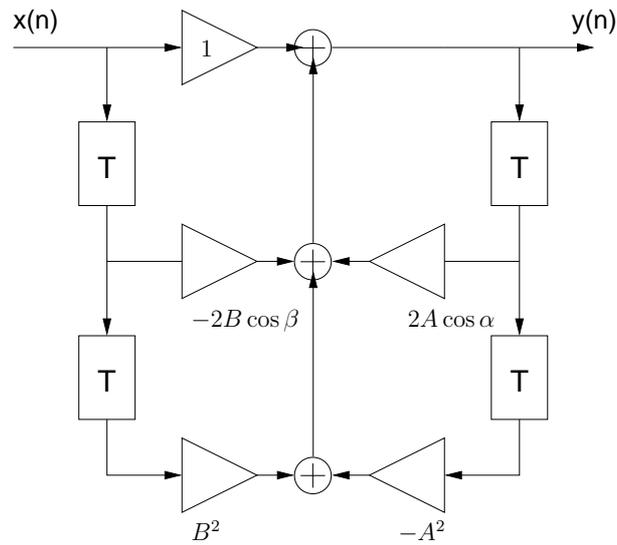


FIG. 3 –

### 2.3 Exercice Image (4 points)

Sur la figure suivante, vous pouvez voir une image originale d'un os obtenu par transmission de rayons X, et son image de gradient correspondante qui affiche la norme du gradient calculée pour chaque pixel.

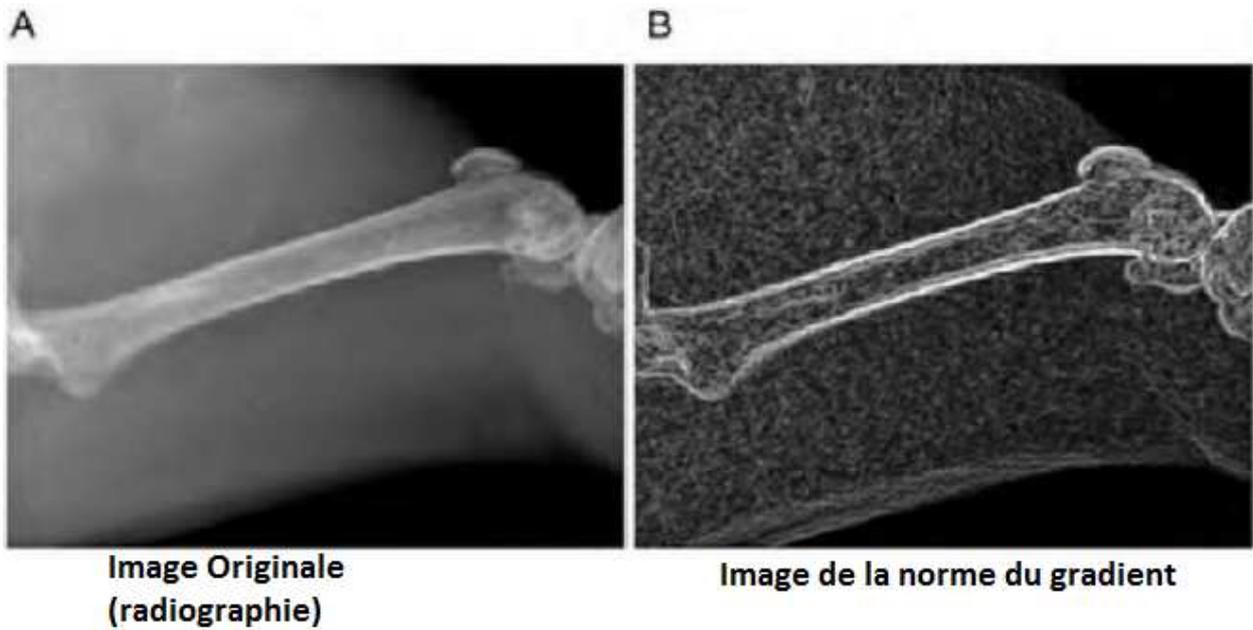


FIG. 4 – Figure de l'exercice image.

- Donner un exemple de filtre qui pourrait être utilisé pour calculer les vecteurs gradient.
- Donner la définition mathématique de la norme du gradient.
- Si vous seuillez l'image gradient pour extraire le contour des os mettez en évidence au moins deux problèmes auxquels vous risquez d'être confronté.

### 3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}, \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \text{TF}[x(t)] &= X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \\ \text{TF}^{-1}[X(\nu)] &= x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \\ \text{TF}[x(t) * y(t)] &= \text{TF}[x(t)] \cdot \text{TF}[y(t)] \\ \text{TF}[s(t-a)] &= e^{-j2\pi\nu a} S(\nu) \\ \text{TF}[s(t)e^{j2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu - \nu_0) \\ \text{TF}[s^{(n)}(t)] &= (j2\pi\nu)^n S(\nu) \\ \delta(t) &= \text{TF}^{-1}[1] \\ \delta(\nu) &= \text{TF}[1] \\ \text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

Durée utile  $T$  d'un signal réel  $s(t)$  :

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 dt$$

Largeur utile  $B$  du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 d\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T \cdot B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit  $x(t)$  un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de  $x(t)$  :

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt$$

Sa transformée de Fourier :  $\text{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$

Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Pour  $s(t)$   $T_0$ -périodique, avec  $T_0 = 1/\nu_0$  :

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n \nu_0 t}, \quad \text{avec : } c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j2\pi n \nu_0 t} dt$$

Convolution :

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ x * \delta &= x \\ x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , réponse  $y(t)$  à une entrée  $x(t)$  :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

Pour  $x(t)$  signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu) X(\nu)$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \text{TFTD}(s[n]) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] e^{-j2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \text{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(\nu - k \nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle  $h(n)$ , réponse fréquentielle :

$$H(f) = \text{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f) X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret  $x(n)$  :

$$X(z) = \text{TZ}[x(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\text{TZ}[x(n - k)] = z^{-k} \text{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\text{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z) Y(z)$$

$\text{TFTD}[x(n)] = \text{TZ}[x(n)]$  calculée en  $z = e^{j2\pi f}$

Soit un signal discret  $x(n)$  de durée finie  $N$  :

$$x(n) = 0 \quad \forall n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de  $x$  :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n f}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\text{TFD}[x(n)] = X[k] = X\left(f = \frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \forall 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \text{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

<i>Fenêtre</i>	<i>Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)</i>	<i>Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)</i>
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57