M1 informatique : Traitement du signal et des images
Examen final - Durée : 2h

10 janvier 2014

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les différentes sous-parties peuvent être traitées dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Signaux 1D (3 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse.

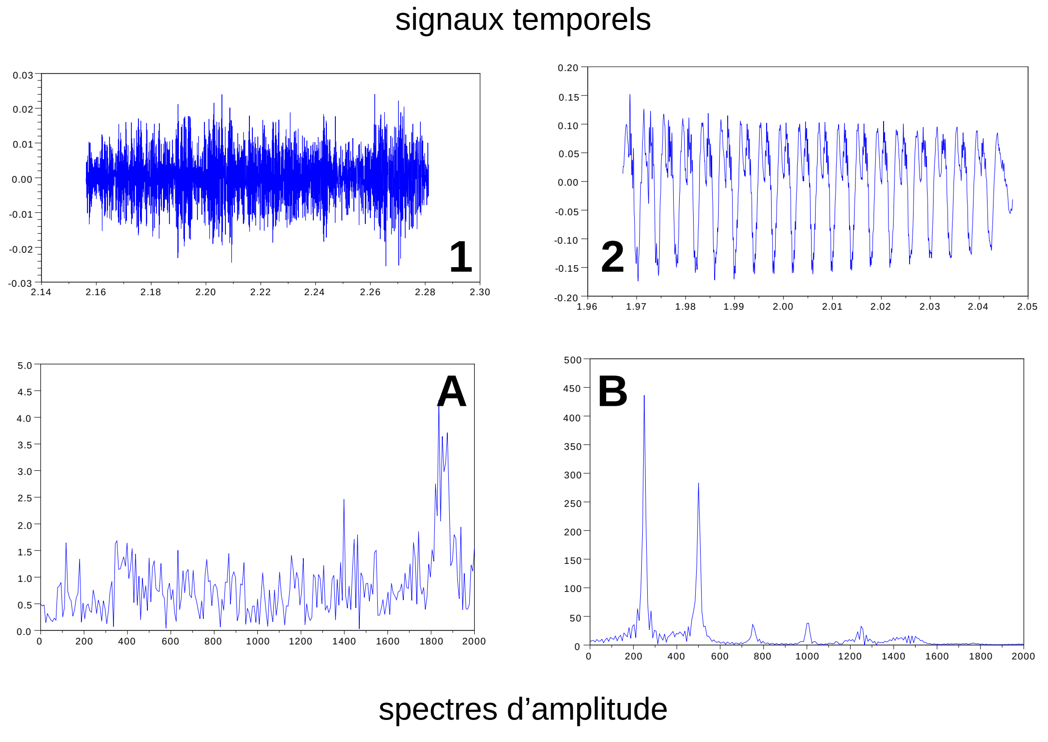

FIG. 1 – Appariement signal / spectre.

b) Si un filtre numérique d'entrée x et de sortie y est défini par l'équation aux différences

$$y(n) = a.x(n) + b.x(n-1) + c.x(n-2)$$

quelle est sa réponse impulsionnelle ?

c) Quel est l'intérêt de la transformée de Fourier discrète (TFD) par rapport à la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) ?

1.2 Image (4 points)

NB : Rédiger de façon synthétique mais argumentée.

a) Donner le principe du filtrage dans les images.

b) A quelle opération correspond le filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel ? dans le domaine spatial ?

c) Donner le principe général de ces opérations dans l'espace discret.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Image (3 points)

a) Sur la figure 2, retrouver pour chaque image la correspondance entre les images (a) et (b) et leur transformée de Fourier.

b) Proposez des opérateurs (filtres) qui, appliqués sur l'image (a) de la figure 2, permettent d'obtenir les images (b) (c) et (d) sur la figure 2.

2.2 Filtrage numérique 1D (4 points)

Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \rho y(n-1) + x(n) + x(n-2)$$

Son diagramme pôle-zéros est représenté sur la figure 4.

a) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer sa fonction de transfert.

b) Le filtre est-il stable ou instable ? (justifier)

c) Dessinez l'allure de sa réponse fréquentielle.

d) On filtre un signal composé de deux sinusoïdes, de fréquences respectives 1/8 et 1/4 (en fréquences normalisées). Quel est le signal en sortie du filtre ?

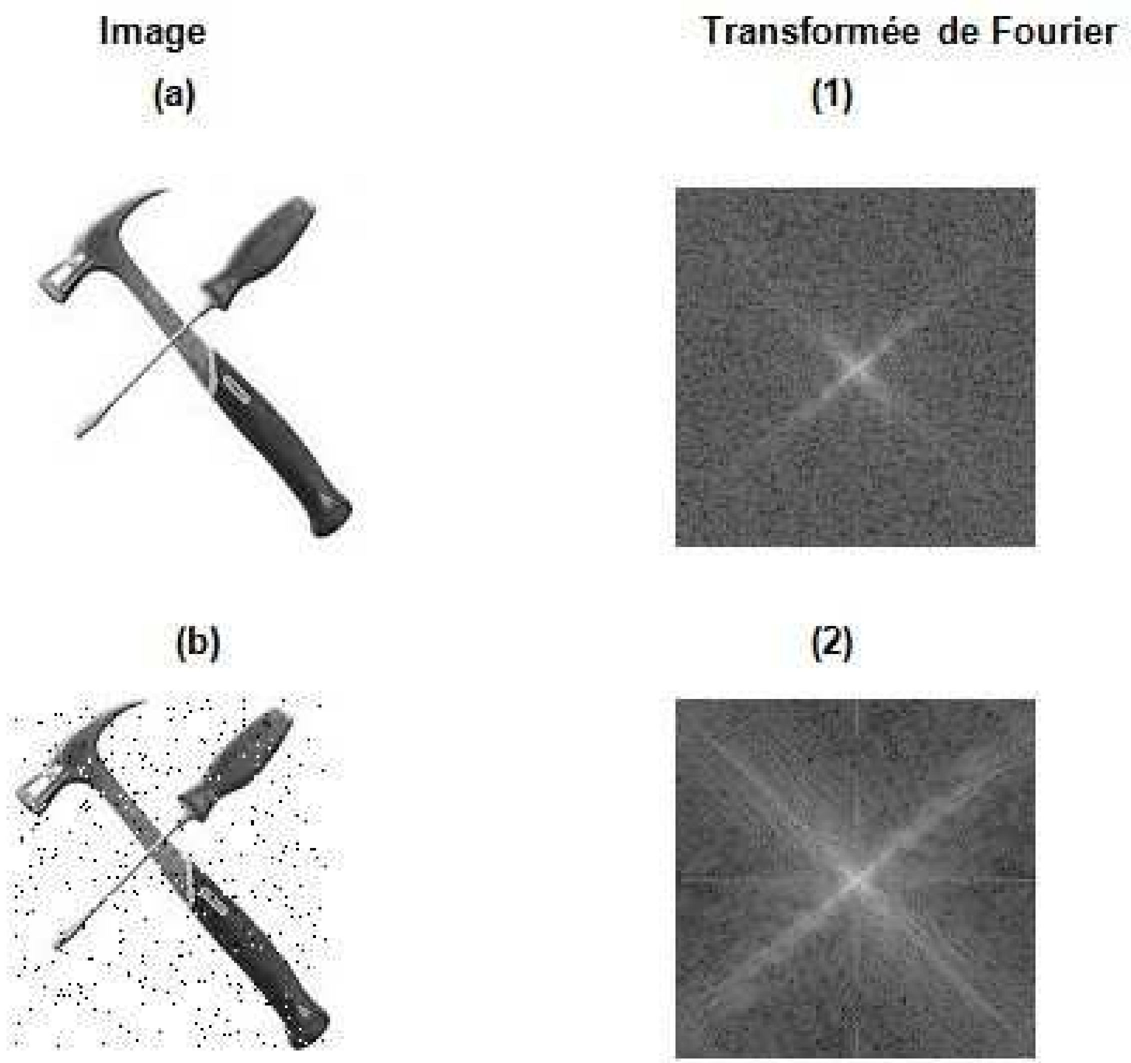

FIG. 2 – Images, série 1.

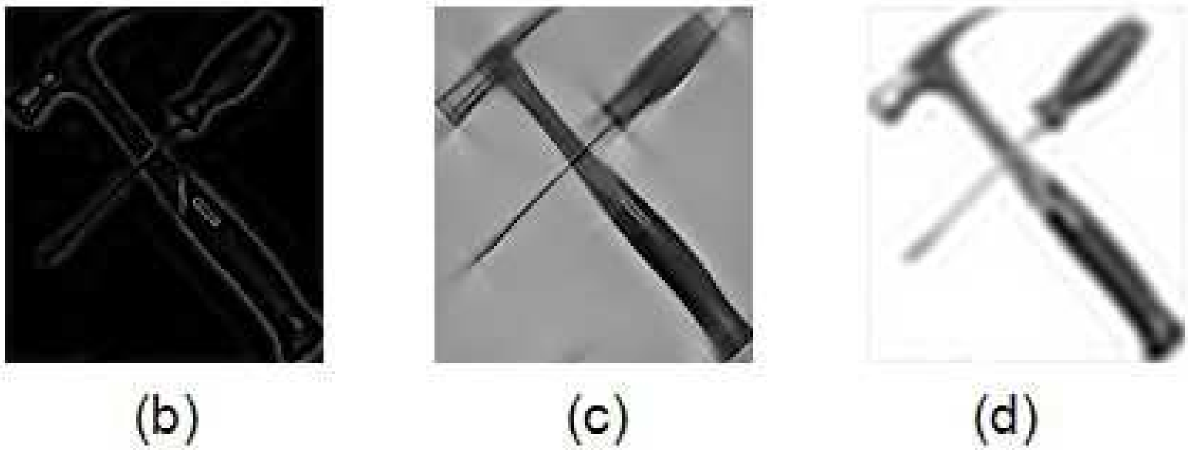

FIG. 3 – Images, série 2.

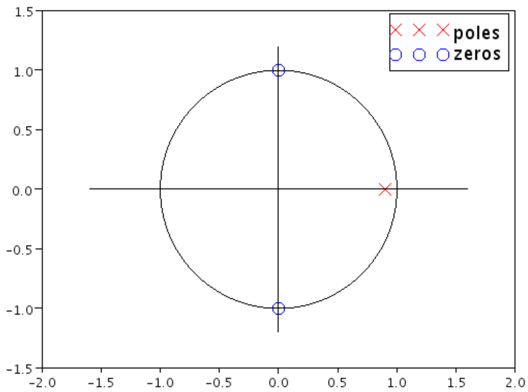

FIG. 4 – Diagramme pôles-zéros du filtre.

2.3 Echantillonnage 1D (3,5 points)

Pour certaines applications comme la réduction de bruit ou le codage, on applique aux signaux audio un traitement différencié par bande de fréquence. A cet effet, le signal est décomposé en N signaux à bande étroite par un banc de $N-1$ filtres passe-bande et 1 filtre passe-bas, selon le schéma de la figure ci-dessous. On considère ici une décomposition en 4 sous-bandes et un signal de spectre triangulaire s'étendant sur une bande limitée $[-B; B]$.

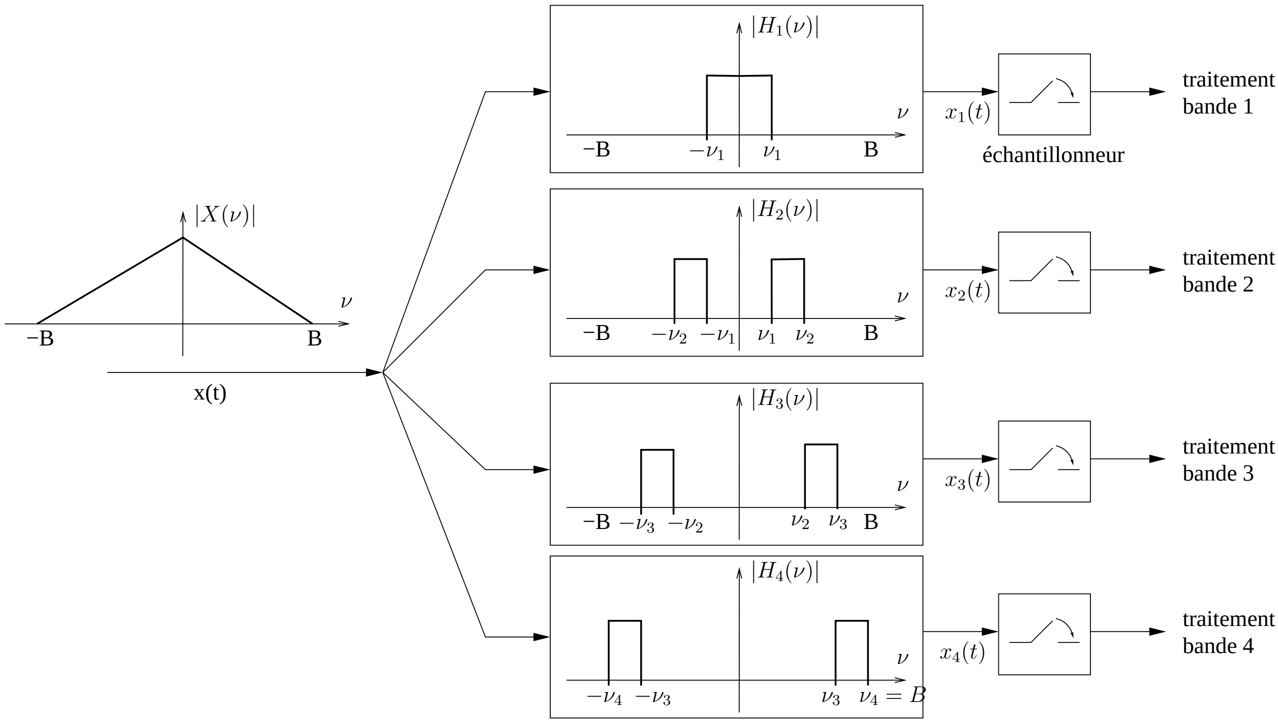

FIG. 5 – Traitement d'un signal par sous-bandes.

Le signal $x_3(t)$ de la 3ème bande a ainsi le spectre d'amplitude représenté sur la figure 6.

a) D'après le théorème de Shannon, quelle fréquence d'échantillonnage permet un échantillonnage sans perte d'information sur la 3ème bande ?

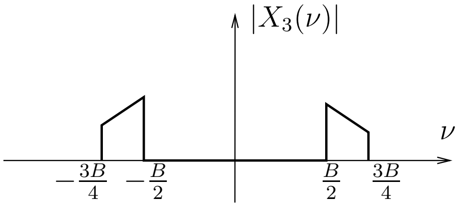

FIG. 6 – Spectre d'amplitude du signal de la 3ème bande.

b) On échantillonne $x_3(t)$ à la fréquence d'échantillonnage $B/2$. Tracer le spectre d'amplitude du signal échantillonné, noté $X_3^e(\nu)$. Comment peut-on récupérer l'information du signal x_3 original ?

c) Chaque bande subit, après l'échantilonnage, un traitement numérique qui nécessite K opérations par échantillon. Quel est l'intérêt de la réduction de la fréquence d'échantillonnage ?

2.4 Analyse spectrale numérique (3 points)

Soit un signal composé de deux sinusoïdes, dont le spectre, en décibels, est représenté sur la figure 7. On fixe $\Delta_f = 0.01$, en fréquence normalisée. On souhaite faire une analyse spectrale du signal à partir d'une séquence de N échantillons.

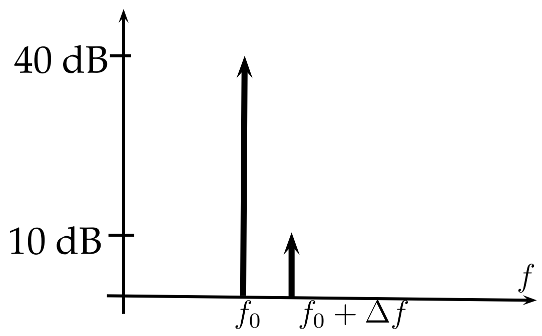

FIG. 7 – Spectre d'amplitude du signal.

a) Par quel type de fenêtre (rectangle, triangle, Hamming, Hanning, Blackman...) faut-il pondérer la séquence pour avoir une finesse en amplitude suffisante ?

b) Quelle doit être la valeur minimale de N pour avoir une finesse en fréquence suffisante ? Si l'on calcule le spectre par transformée de Fourier rapide (FFT), par combien de 0 faut-il compléter les N échantillons du signal ?

3 Formulaire

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$
Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57