M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images

Examen final - Durée : 2h30

9 janvier 2015

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les différentes sous-parties peuvent être traitées dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

1 Questions de cours

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

1.1 Signaux 1D (4 points)

a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse. Pour la figure B, justifiez précisément l'allure du spectre.

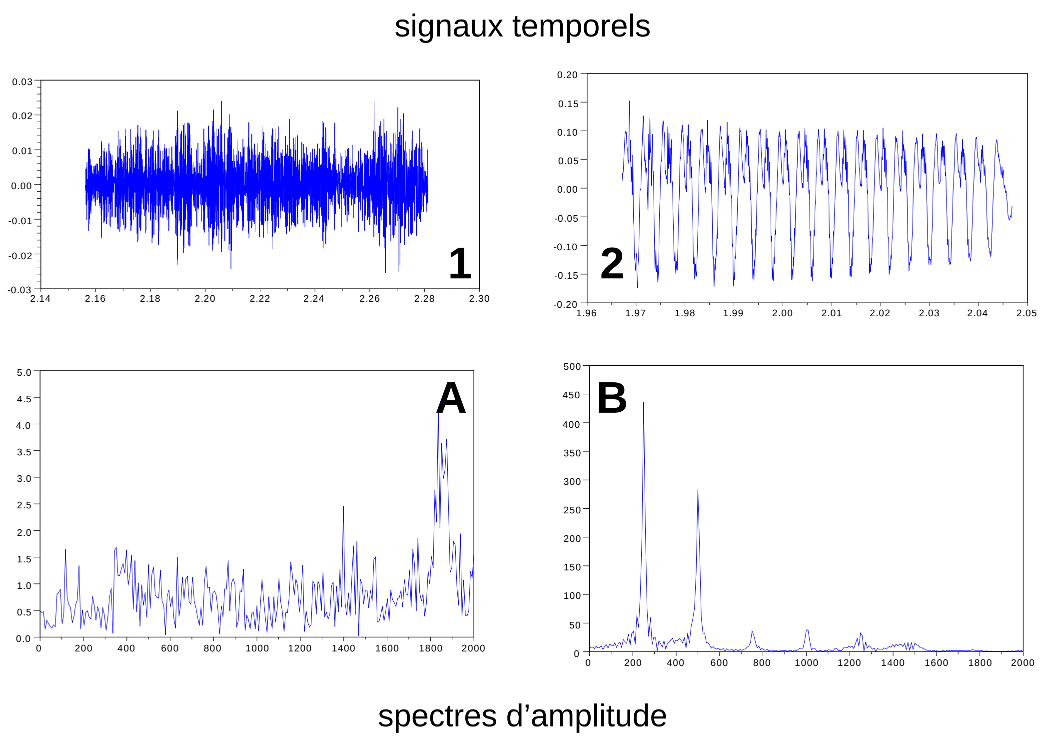

FIGURE 1 – Appariement signal / spectre.

b) Soit un signal analogique x de spectre à support borné par ± 8 kHz. Ce signal est échantillonné à 32 kHz. Soit x_e le signal échantillonné. En ne conservant qu'un échantillon sur deux de x_e, perd-on de l'information ? (justifier)

c) Qu'appelle-t-on la *réponse impulsionnelle* d'un filtre numérique ?

d) Quelle est la différence entre la *transformée de Fourier à temps discret (TFTD)* et la *transformée de Fourier discrète* d'un signal échantillonné ?

1.2 Image (3 points)

a) Quelles sont les trois grandes catégories de transformation d'images ? Décrivez le principe général pour chacune de ces catégories.

b) Donnez un exemple de tranformation dans chacune des trois catégories.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice 1 Image (2 points)

Sur la figure 2, mettre en correspondance chaque image a1, a2, a3 avec son histogramme et son histogramme cumulé. Justifier vos réponses.

- D'après vous quelle est l'image originale ?
- Quelles transformations d'histogramme ont été appliquées sur cette image originale pour obtenir les deux autres images ?
- Laquelle vous semble la plus appropriée pour obtenir une bonne amélioration de contraste ? Justifier votre réponse.

2.2 Exercice 2 Image (2 points)

Sur la figure 3, mettre en correspondance chaque image avec l'image obtenue par application de la transformation de Fourier. Justifier vos réponses.

Proposez des opérateurs qui, appliqués sur l'image de la transformée de Fourier et après calcul de la transformée de Fourier inverse, permettraient d'obtenir les images de la figure 4. Justifier vos réponses.

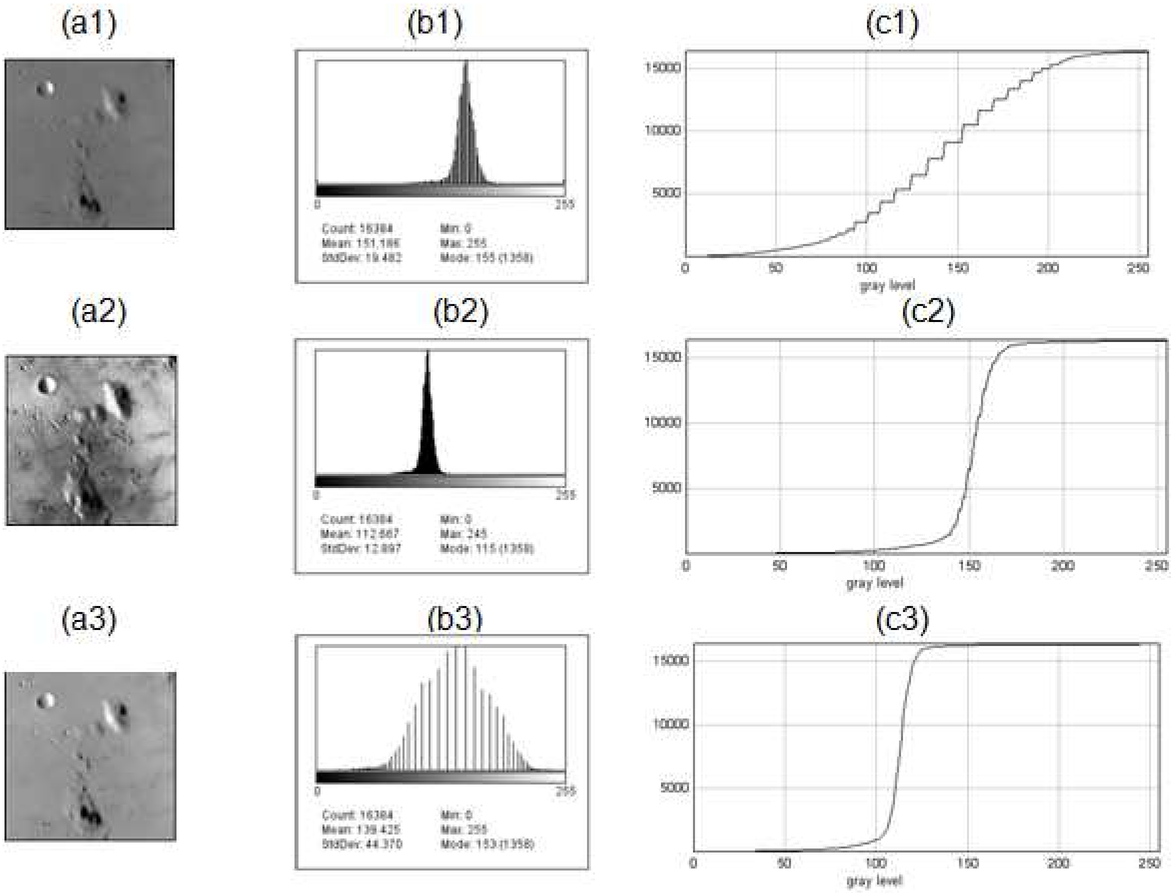

FIGURE 2 – Figure de l’exercice 1 image.

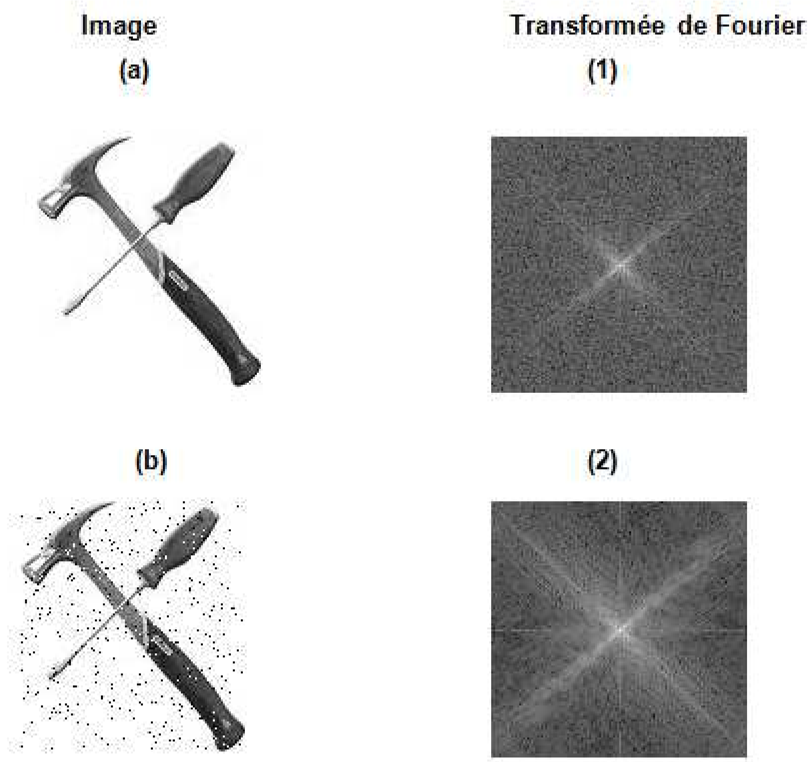

FIGURE 3 – Figure de l’exercice 2 image.

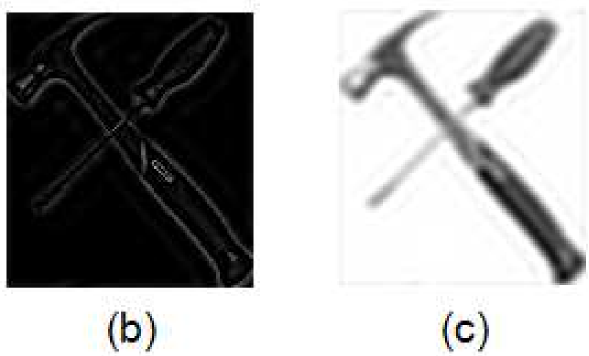

FIGURE 4 – Figure de l’exercice 2 image.

2.3 Echantillonnage 1D (4 points)

Soient les signaux

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{sinc}^2(\pi\nu_0 t) \\ y(t) &= \nu_0\,\mathrm{sinc}(\pi\nu_0 t) \end{aligned}$$

Les transformées de Fourier de ces signaux sont des fonctions **réelles** de la fréquence, représentées respectivement sur les figures 5 et 6.

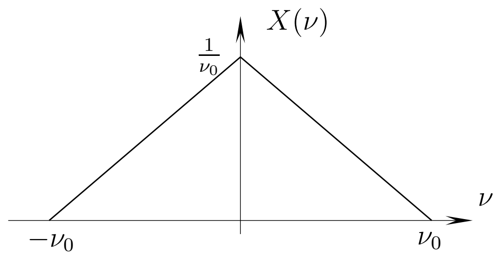

FIGURE 5 – Spectre de $x(t)$.

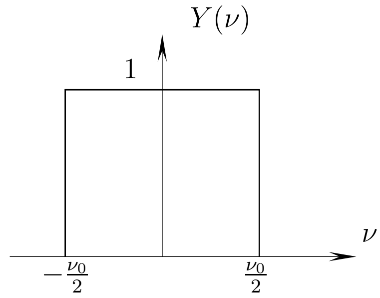

FIGURE 6 – Spectre de $y(t)$.

a) On échantillonne $x(t)$ à une fréquence ν_e. Représenter le spectre du signal échantillonné, $X_e(\nu)$, pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$. Commentez.

b) On cherche à reconstruire $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_e/2$. Donner l'expression du signal reconstruit $\tilde{x}(t)$ pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$.

Source : Jean-Yves Tourneret, ENSEEIHT, janvier 2010

2.4 Analyse spectrale et filtrage numériques 1D (5 points)

a) Soit un signal discret x composé de deux sinusoïdes aux fréquences (normalisées) $f_1 = 1/8$ et $f_2 = 1,3/8$, avec un écart d'amplitude de 20 dB entre les deux :

$$x(n) = 10\sin(2\pi f_1 n) + \sin(2\pi f_2 n)$$

On veut faire une analyse spectrale numérique de ce signal, avec le minimum d'échantillons. Initialement, le nombre d'échantillons N est fixé à 32 et on applique un fenêtrage rectangulaire. On obtient le spectre de la figure 7

- Dessinez le spectre d'amplitude théorique du signal entre les fréquences $-1/2$ et $+1/2$. Sans faire de calcul, qu'est-ce qui peut *a priori* expliquer qu'on n'observe qu'une paire de lobes dans le spectre d'amplitude ?
- Déterminez le type de fenêtre et la valeur de N nécessaires pour observer le spectre avec une résolution suffisante en amplitude et en fréquence. Si la TFD est calculée par FFT, que doit-on faire avant le calcul ?

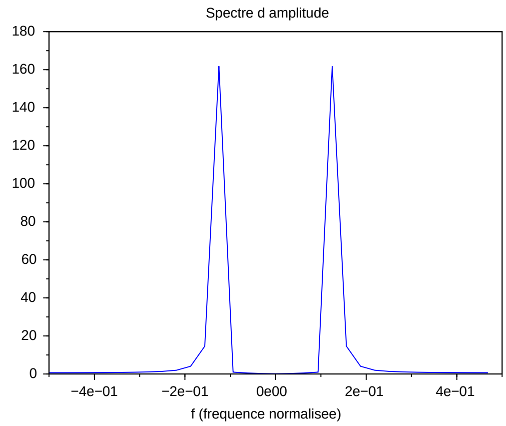

FIGURE 7 – Spectre d'amplitude pour un fenêtrage rectangulaire sur 32 échantillons.

b) Soit un filtre défini par le diagramme pôles-zéros de la figure 8.
- Est-il stable ?
- Quelles sont les valeurs de la réponse fréquentielle $G(f)$ aux fréquences f_1 et f_2 ?
- Donnez la définition de la stabilité d'un filtre. D'après cette définition, la sortie d'un filtre instable peut-elle être bornée ?
- On filtre le signal x de la question a par le filtre G. Expliquez la forme du signal de sortie s (figure 9).

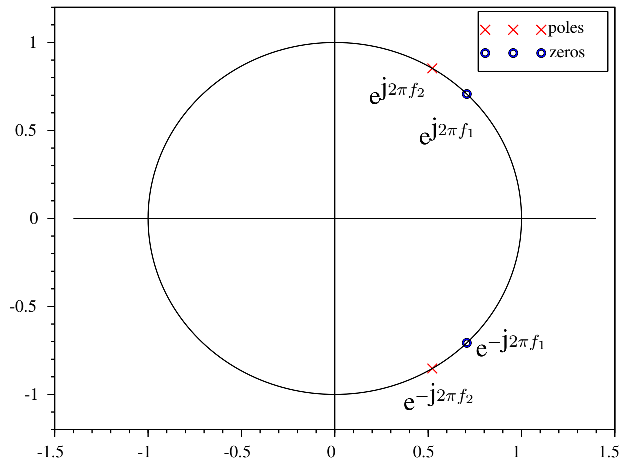

FIGURE 8 – Diagramme pôles-zéros.

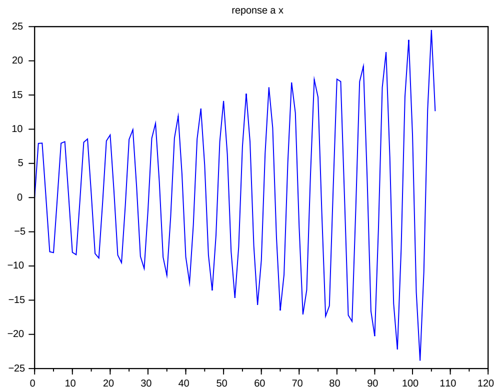

FIGURE 9 – Sortie s du filtre G pour l'entrée x.

3 Formulaire

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$

Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57