M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images

# Correction de l'examen de janvier 2015

## Exercice 2.4 : analyse spectrale et filtrage numériques

*Note : cet exercice reprenait largement le TP noté, dont vous aviez eu une correction très détaillée.*

**a)** Le spectre théorique du signal est représenté sur la figure 1.

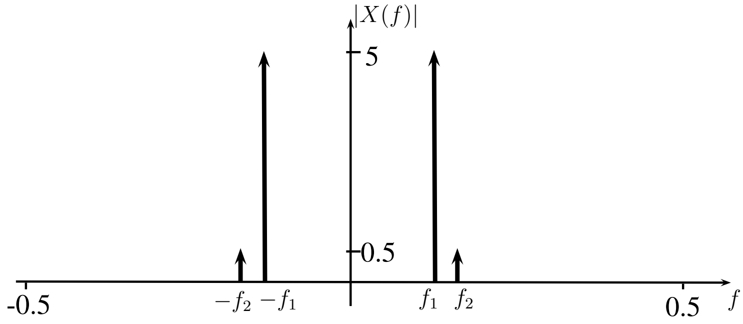



FIGURE 1 – Spectre d'amplitude théorique de $x(t)$.

Lors de l'analyse spectrale à partir de 32 échantillons, on n'observe que 2 lobes. Le résultat peut venir d'une résolution insuffisante en fréquence (les lobes principaux correspondant à 2 raies voisines se recouvrent) ou d'une résolution insuffisante en amplitude (le lobe principal correspondant à la petite raie est masqué par les lobes secondaires de la grande).

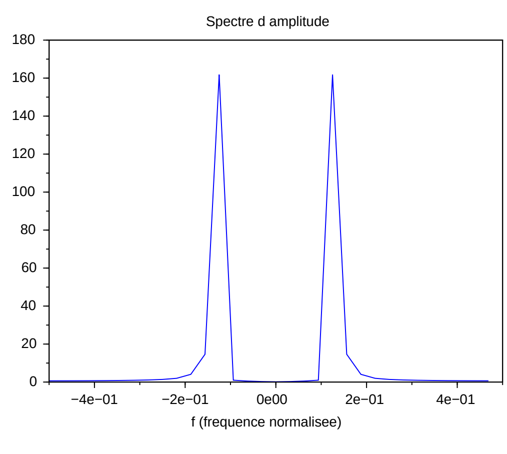



FIGURE 2 – Spectre d'amplitude au lancement.

L'écart d'amplitude entre les deux sinusoïdes étant de 20 dB, il faut une fenêtre triangulaire, de Hamming ou de Hanning pour que la résolution en amplitude soit suffisante. Celle de Blackman conviendrait également, mais on souhaite aussi que $N$ soit minimal. Or, pour une même résolution fréquentielle, la fenêtre de Blackman nécessite plus d'échantillons. Nous choisissons donc une fenêtre de Hamming ou de Hanning (meilleure résolution d'amplitude que la fenêtre triangulaire pour une même résolution fréquentielle). La largeur du lobe principal doit être inférieure à l'écart fréquentiel $\Delta f$ entre les deux sinusoïdes, soit :

$$\frac{4}{N} < \Delta f = \frac{0,3}{8}$$

Donc $N \geq 107$.

Pour calculer la TFD par FFT, il faut compléter les $N$ échantillons par autant de zéros que nécessaire pour avoir un nombre total d'échantillons puissance de 2. La puissance de 2 immédiatement supérieure à 107 étant 128, il faut compléter par 21 zéros.

*Note 1 : le calcul de la résolution fréquentielle dépendant du type de fenêtre, ce dernier est toujours à choisir* ***avant*** *le nombre d'échantillons.*

*Note 2 : le nombre d'échantillons $N$ n'est pas nécessairement une puissance de 2 si l'on calcule la FFT après zéro-padding. L'essentiel est que la TFD soit calculée sur un nombre d'échantillons fréquentiel $NFFT$ qui soit une puissance de 2.*

**b)** Le filtre est instable, puisque ses pôles sont sur le cercle unité.

La réponse fréquentielle $G(f)$ est la fonction de transfert calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$. Comme $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi f_1}$ et $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi f_2}$ sont respectivement zéros et pôles, $G(f_1) = 0$ et $G(f_2) = \infty$.

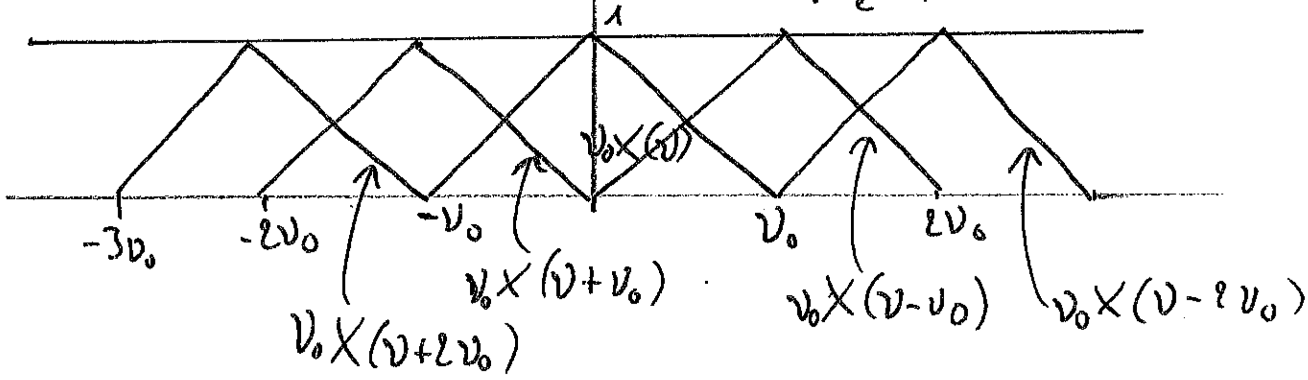
Un filtre est stable si pour toute entrée bornée la sortie est bornée. Donc pour un filtre instable, il existe une entrée bornée telle que la sortie n'est pas bornée. Cela n'exclut pas qu'il puisse exister aussi des entrées bornées donnant des sorties bornées ! *La logique fait partie de l'informatique et devrait être maîtrisée en M1 info.*

Le signal $s$ ressemble à une sinusoïde dont l'amplitude augmente. En effet, le filtre est instable, donc une entrée bornée peut donner une sortie divergeant vers l'infini (ce n'est pas systématique, comme on l'a dit). C'est le cas ici, puisque le signal d'entrée contient une sinusoïde à la fréquence $f_2$, pour laquelle la réponse fréquentielle est infinie. Notez que seule la fréquence $f_2$ est présente dans le signal, puisque $G(f_1) = 0$.

## 2.3 Echantillonnage

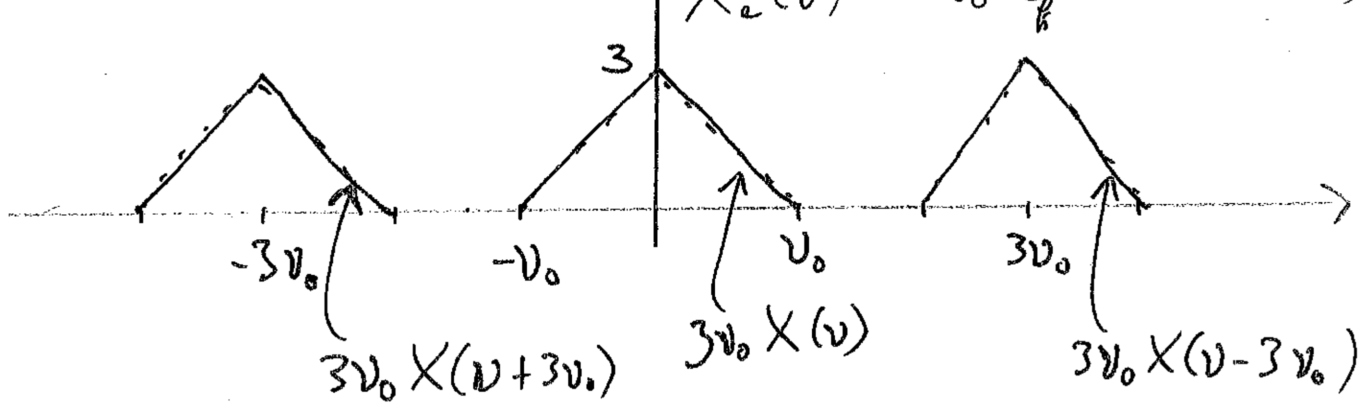
a) Pour $\nu_e = \nu_0$ : repliement de spectre

$$X_e(\nu) = \nu_0 \sum_k X(\nu - k\nu_0)$$



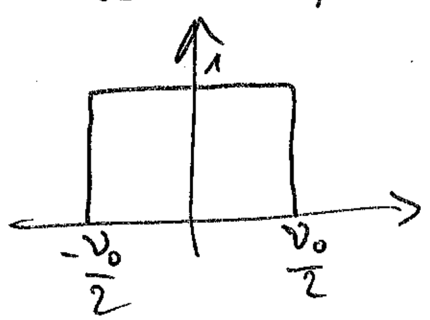

Pour $\nu_e = 3\nu_0$ : condition de Shannon respectée

$$X_e(\nu) = 3\nu_0 \sum_k X(\nu - 3k\nu_0)$$




b) A l'issue du filtrage passe-bas,

- pour $\nu_e = 3\nu_0$, on retrouve $x(t)$
- pour $\nu_e = \nu_0$, on a un signal de spectre




c'est-à-dire : $\tilde{x}(t) = y(t)$