M1 informatique : Traitement du signal et des images
Examen final - Durée : 2h

8 janvier 2019

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 Questions de cours signaux 1D (5 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse.

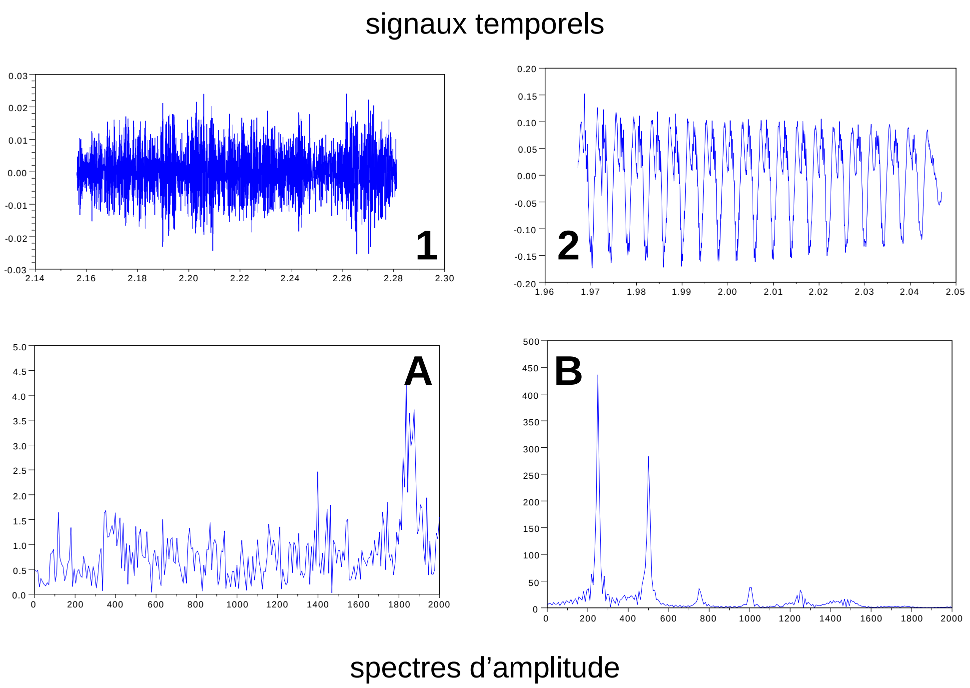

FIGURE 1 – Appariement signal / spectre.

b) Énoncez le théorème de Shannon.

c) Soit un signal analogique x de spectre à support borné par ± 8 kHz. Ce signal est échantillonné à 32 kHz. Soit x_e le signal échantillonné. En ne conservant qu'un échantillon sur deux de x_e, perd-on de l'information ? (justifier)

d) Soit le spectre d'amplitude représenté sur la figure 2, nul en dehors de l'intervalle $[0; \nu_0]$.
— Pourquoi ne peut-il être celui d'un signal réel ?
— Pourquoi ne peut-il être celui d'un signal échantillonné ?

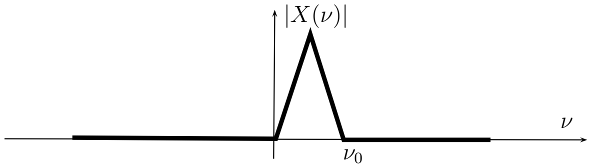

FIGURE 2 – Un étrange spectre d'amplitude.

1.2 Question de cours - Image (4 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

a) Quelles sont les trois grandes catégories de transformation d'images ? Décrivez le principe général pour chacune de ces catégories.

b) Donnez le principe du filtrage moyenneur ? du filtrage gaussien ? du filtrage non linéaire par filtre médian ?

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice Image (3 points)

Sur la figure en annexe, mettre en correspondance chaque image 1, 2, 3 avec son histogramme et son histogramme cumulé. Justifier vos réponses.

Si l'image 1 est l'image originale, quelles transformations d'histogramme ont été appliquées sur cette image originale pour obtenir les deux autres images ? Justifier votre réponse.

2.2 Filtrage et analyse spectrale numériques (8 points)

a) Soit un signal discret x composé de deux sinusoïdes aux fréquences $f_1 = 1/8$ et $f_2 = 1, 1/8$, avec un écart d'amplitude de 20 dB entre les deux :

$$x(n) = 10\sin(2\pi f_1 n) + \sin(2\pi f_2 n)$$

On veut faire une analyse spectrale numérique de ce signal, avec le minimum d'échantillons.
— Dessinez le spectre d'amplitude théorique du signal entre les fréquences normalisées -1/2 et 1/2.
— Déterminez le type de fenêtre et le nombre minimal d'échantillons N nécessaires pour observer le spectre avec une résolution suffisante en amplitude et en fréquence.
— Si l'on calcule le spectre par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT), que doit-on faire avant le calcul ?

b) Soit un filtre défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) - 2\cos(2\pi f_1)x(n-1) + x(n-2)$$

— Quelle est la réponse impulsionnelle h ?

— Calculez la réponse fréquentielle $H(f)$ puis son module $|H(f)|$. Vous chercherez à mettre $H(f)$ sous la forme $A(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi f}$, avec $A(f) \in \mathbb{R}$, en groupant les exponentielles ayant le même coefficient deux par deux et en exploitant la relation suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

— La figure 3 représente le module $|H(f)|$ de la réponse fréquentielle. Si l'on filtre le signal x par ce filtre, on observe une sinusoïde à la fréquence f_2. Pourquoi ?

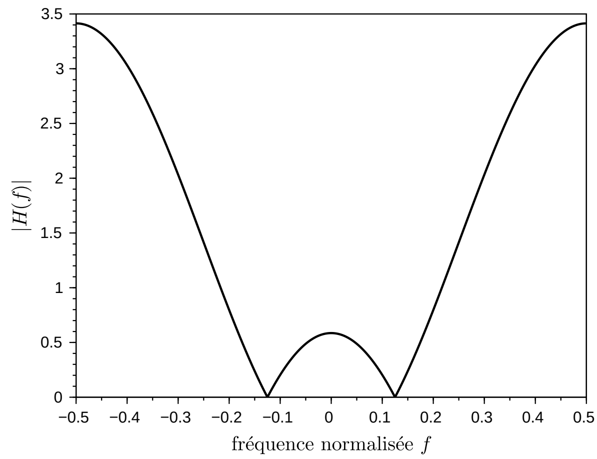

FIGURE 3 – Réponse fréquentielle en module du filtre de la question b.

c) Soit un filtre défini par d'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) - 2\alpha\cos(2\pi f_2)x(n-1) + \alpha^2 x(n-2) + \sqrt{2}\beta y(n-1) - \beta^2 y(n-2)$$

— Calculer la fonction de transfert $G(z)$ de ce filtre.

— La fig. 4 représente le digramme pôles-zéros de ce filtre, pour $\alpha = 1,05$ et $\beta = 0,95$. Dessinez le module de la réponse fréquentielle entre les fréquences normalisées $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

— On filtre le signal x et on fait une analyse spectrale numérique avec les mêmes paramètres que ceux que vous avez définis à la question (a) (en supposant qu'ils soient corrects). On a alors la figure 5. Expliquez.

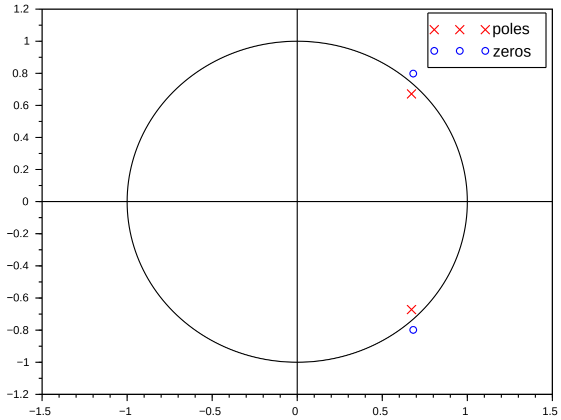

FIGURE 4 – Diagramme pôles-zéros du filtre de la question c.

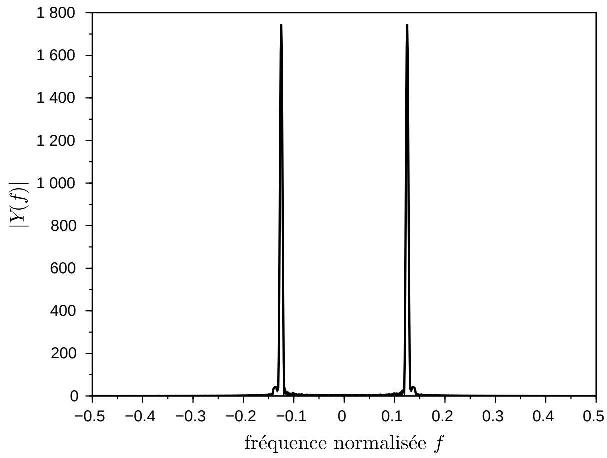

FIGURE 5 – Spectre d'amplitude du résultat du filtrage du signal x par le filtre de la question c.

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Transformée de Fourier :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mathrm{TF}[s(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu)$$

$$\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = S(\nu - \nu_0)$$
$$\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0)$$

Formule de Poisson : pour un signal analogique de transformée de Fourier (TF) $S(\nu)$, la TF du signal échantillonné à la fréquence ν_e vaut :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

— Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

— Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$

Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

— Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

— Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57