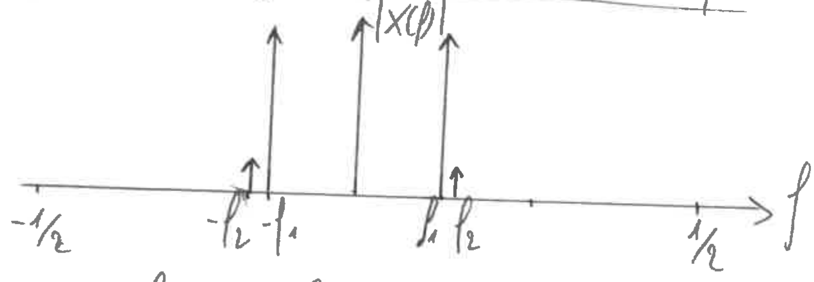
2.2 Filtrage et analyse spectrale numériques

a)



Pour que la résolution en amplitude soit suffisante, il faut une fenêtre triangulaire ou de Hanning ou de Hamming. Blackman convient aussi, mais la résolution fréquentielle est moins bonne.

Le nombre d'échantillons N doit vérifier :

$$4/N \leq f_2 - f_1 \quad , \text{ soit } \quad N \geq \frac{4}{f_2 - f_1} = \frac{4}{0{,}1/8} = 320$$

Si la TFD est calculée par FFT, il faut un nombre d'échantillons puissance de 2. On complète donc les 320 échantillons par 512 - 320 zéros (zéro-padding)

b) $h(n) = \delta(n) - 2\cos(2\pi f_1)\,\delta(n-1) + \delta(n-2)$

$$\begin{aligned}
H(f) &= \text{TFTD}[h] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)\, e^{-j2\pi n f} \\
&= h(0) + h(1)\,e^{-j2\pi f} + h(2)\,e^{-j4\pi f} \\
&= 1 - 2\cos(2\pi f_1)\,e^{-j2\pi f} + e^{-j4\pi f} \\
&= \left(e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}\right)e^{-j2\pi f} - 2\cos(2\pi f_1)\,e^{-j2\pi f} \\
&= 2\left(\cos(2\pi f) - \cos(2\pi f_1)\right)e^{-j2\pi f}
\end{aligned}$$

Donc $|H(f)| = 2\,|\cos(2\pi f) - \cos(2\pi f_1)|$

$H(f)$ s'annule donc en $f = f_1$, comme illustré par la figure.

Le filtre supprime donc la sinusoïde à la fréquence f_1, ne laissant que celle à la fréquence f_2

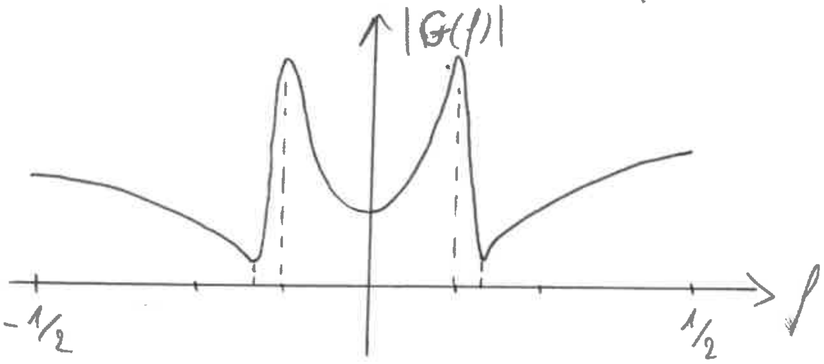
c) Calculons la TZ de l'équation :

$$TZ[y(n)] = TZ[x(n)] - 2\alpha\cos(2\pi f_2)\, TZ[x(n-1)] + \alpha^2\, TZ[x(n-2)] + \sqrt{2}\beta\, TZ[y(n-1)] - \beta^2\, TZ[y(n-2)]$$ (par linéarité de la TZ)

Appliquons le théorème du retard :

$$Y(z) = X(z) - 2\alpha\cos(2\pi f_2) z^{-1} X(z) + \alpha^2 z^{-2} X(z) + \sqrt{2}\beta z^{-1} Y(z) - \beta^2 z^{-2} Y(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2\alpha\cos(2\pi f_2) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}{1 - \sqrt{2}\beta z^{-1} + \beta^2 z^{-2}}$$



Les paramètres d'analyse à la question (a) étaient adaptés à une différence d'amplitude de 20 dB entre les 2 sinusoïdes. Ici, comme le max de G(f) correspond à f_1 et le min à f_2, l'écart entre les amplitudes des sinusoïdes est accentué par le filtrage, de sorte que la résolution en amplitude n'est plus suffisante.