Université Paris 5 / UFR de Mathématiques et Informatique
Master Mathématiques et Informatique pour les Sciences du Vivant / M1 IPCC

Traitement du Signal 1

Examen final, 2e session (1h30) - 3 février 2005

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. La plupart des questions de cours devraient pouvoir être traitées assez rapidement, sans perdre de temps à replonger dans le cours. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles pour ces exercices

1 Questions de cours

1.1 QCM (4 points)

NB :

- *Lorsque plusieurs réponses sont possibles, elles doivent être toutes cochées pour que la réponse soit valide.*
- *Le barême est de +1 par réponse juste, 0 par réponse incomplète ou absente et -1/2 par réponse fausse. Il vaut donc mieux ne pas répondre que répondre au hasard.*

1) Soit un signal analogique $s(t)$ dont le spectre s'étend entre $-\nu_{\max}$ et $+\nu_{\max}$. On souhaite échantillonner ce signal à une fréquence $\nu_e < 2\nu_{\max}$. On prend donc la précaution de faire précéder l'échantillonnage d'un filtre anti-repliement de fréquence de coupure $\nu_e/2$. Le signal échantillonné contient-il alors toute l'information contenue dans $s(t)$?

☐ **oui** ☐ **non**

2) La fonction de transfert en z d'un filtre numérique $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(\nu)$ coïncident pour :

☐ $|z| = 1$ ☐ $|z| < 1$ ☐ $|z| = e^{j2\pi\nu}$**, où ν désigne la fréquence normalisée**

3) Le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{1}{1+0.8z^{-1}}$ est

☐ **récursif** ☐ **à réponse impulsionnelle finie** ☐ **stable**

4) Soit un signal échantillonné $x(n)$ de durée finie N. Sa transformée de Fourier discrète sur N points contient

☐ **moins d'information** ☐ **plus d'information** ☐ **autant d'information**

que sa transformée de Fourier à temps discret.

1.2 Questions ouvertes (4 points)

1) Pourquoi peut-on affirmer que plus le spectre d'un signal est étroit, plus la durée utile du signal est longue ?

2) Pourquoi l'analyse spectrale d'une portion limitée d'un signal se traduit-elle par une déformation du spectre théorique du signal ?

3) Lors de l'analyse spectrale numérique d'un signal, on suspecte la résolution fréquentielle d'être insuffisante. Comment augmenter celle-ci sans changer la résolution en amplitude ?

4) Qu'appelle-t-on un filtre causal ?

2 Exercices

2.1 Analyse spectrale numérique (3 points)

Soit un signal constitué de 3 sinusoïdes, dont le spectre théorique est représenté sur la figure 1 (fréquences positives uniquement). Ces sinusoïdes ont pour fréquences respectives $\nu_1 = 5000$ Hz, $\nu_2 = 5150$ Hz et $\nu_1 = 5300$ Hz.

Le signal est échantillonné pendant 35 ms, à 16 kHz. De combien d'échantillons dispose-t-on ainsi ? On souhaite visualiser son spectre à partir de cette séquence, par FFT (transformée de Fourier rapide). Comment s'y prendre, pour avoir une résolution suffisante en amplitude et en fréquence ? **(justifiez votre réponse)**

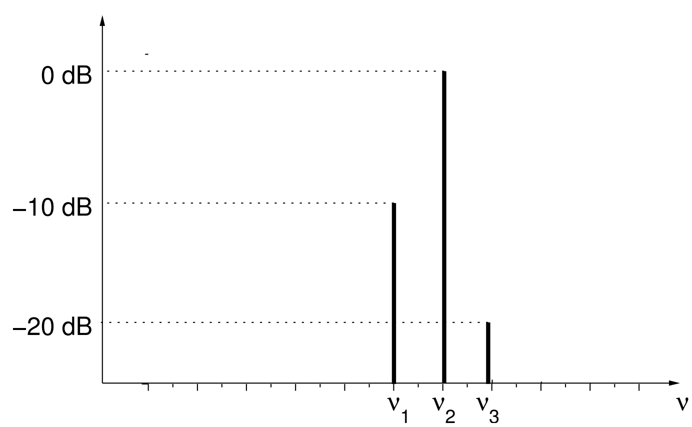

FIG. 1 – Spectre de trois sinusoïdes

2.2 Analyse d'un filtre (4 points)

1) Donner l'équation aux différences et la fonction de transfert $H(z)$ du filtre représenté sur la figure 2. De quel type est sa réponse impulsionnelle ?

2) Déterminer les pôles et les zéros du filtre. A quelle condition celui-ci est-il stable ?

3) Représenter le diagramme pôles-zéros de ce filtre dans le cas où $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1$. En déduire l'allure de sa réponse fréquentielle.

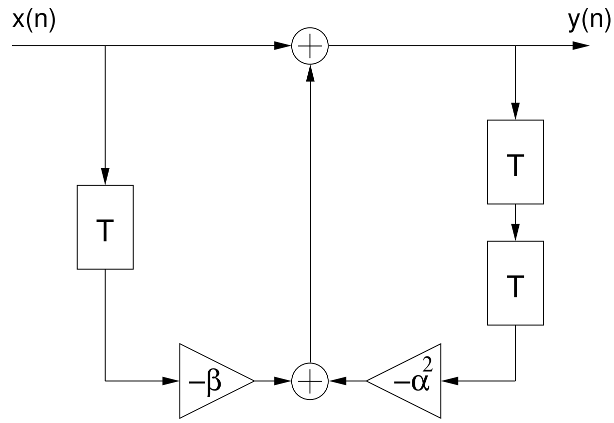

FIG. 2 –

2.3 Synthèse d'un filtre RIF (5 points)

1) Montrer que la réponse impulsionnelle $h(n)$ d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure normalisée $\nu_c = 1/4$ (voir figure 3) peut s'exprimer :

$$h(n) = \begin{cases} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} & \forall n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Ce filtre est-il réalisable sous forme d'un filtre RIF ?

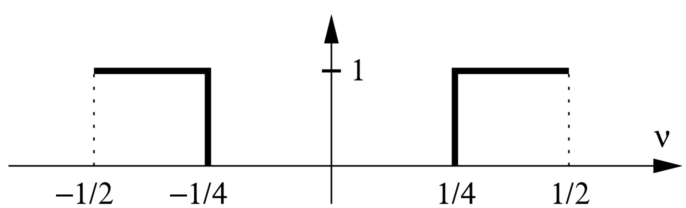

FIG. 3 – Réponse fréquentielle idéale

2) On cherche à approcher ce filtre idéal par un filtre RIF causal à phase linéaire, de longueur N la plus petite possible, par la méthode du fenêtrage. Ce filtre doit respecter le gabarit fréquentiel de la figure 4 : bande de transition de 1/10 ; atténuation de la bande basse supérieure à 30 dB. Comment s'y prendre ?

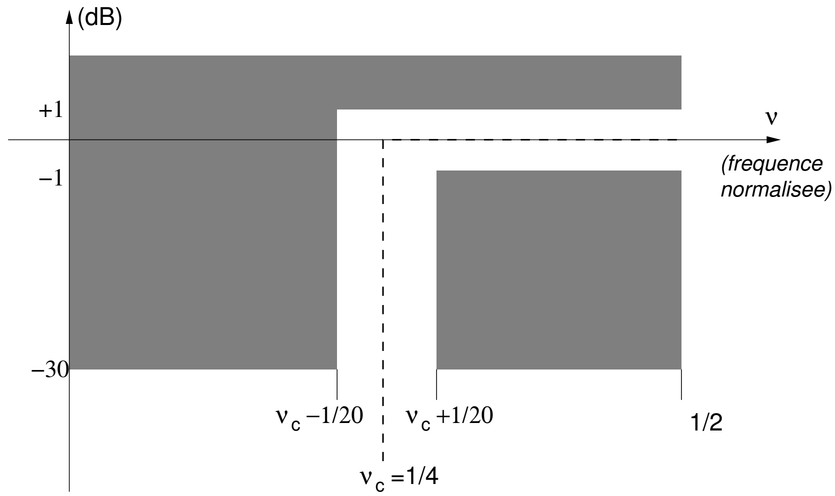

FIG. 4 – Gabarit du filtre passe-haut

3) On remplace le fenêtrage précédent par un fenêtrage rectangulaire symétrique sur 11 points.

- Calculer les coefficients du filtre ainsi synthétisé
- Dessiner la structure de ce filtre
- Dessiner le gabarit dans lequel s'inscrit sa réponse fréquentielle, en précisant la largeur de la bande de transition et l'atténuation de la bande basse.
- Montrer que si l'on met en cascade (l'un à la suite de l'autre) deux filtres comme celui-ci, le système ainsi constitué respecte le gabarit de la question 2.

3 Annexe

On définit la fonction sinus cardinal, notée sinc, par :

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \forall\, x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

A noter :

$$\mathrm{sinc}(n\pi) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$