M1 IPCC : Bases du Traitement du Signal
Examen 2e session - Durée : 1h30

14 juin 2006

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours

1.1 QCM (5 points)

Pour chaque question, cochez toutes les affirmations justes. Le barème est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon.

1)

☐ **Un signal sinusoïdal de 990Hz échantillonné à la fréquence de 1000Hz est perçu comme étant à 10Hz**
☐ **Un signal sinusoïdal de 10Hz échantillonné à la fréquence de 1000Hz est perçu comme étant à 10Hz**

2) La transformée en z, $X(z)$, d'un signal $x(n)$ et sa transformée de Fourier $X(\nu)$ coïncident pour :

☐ $|z| = 1$ ☐ $|z| < 1$
☐ $z = e^{j2\pi\nu}$, **où ν désigne la fréquence normalisée**

3)

☐ **La sortie d'un filtre numérique est égale au produit de convolution du signal d'entrée par la réponse fréquentielle du filtre**
☐ **La sortie d'un filtre numérique est égale au produit de convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle du filtre.**
☐ **Le spectre de la sortie est égal au produit simple du spectre de l'entrée par la réponse fréquentielle du filtre**

4) La figure 1 représente la réponse fréquentielle en module d'un filtre numérique, en fréquence normalisée, de -1,5 à 1,5. Ce filtre est

☐ **passe-bas**
☐ **passe-haut**
☐ **passe-bande**
☐ **instable**

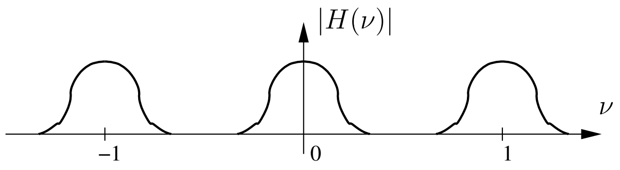

FIG. 1 – Réponse fréquentielle d'un filtre numérique.

5) Le filtre numérique dont le diagramme pôles-zéros est représenté sur la figure 2

☐ **est un filtre passe-bas**
☐ **est un filtre passe-haut**
☐ **est un filtre passe-bande**
☐ **est stable**

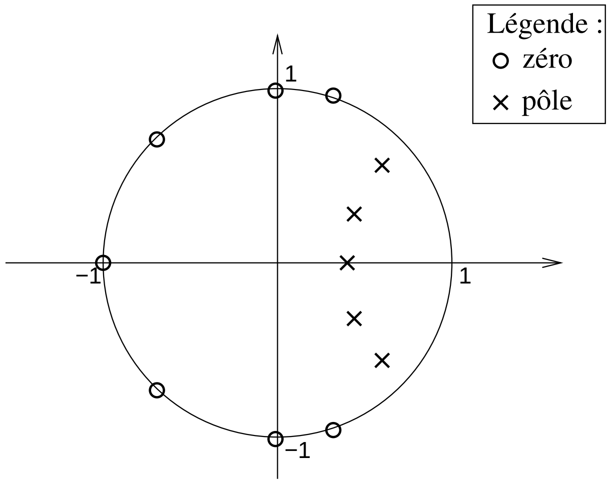

FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros.

1.2 Questions ouvertes (2 points)

Ces questions appellent des réponses courtes.

1) Soit un système de restauration d'archives sonores (numérisées) qui corrige chaque échantillon du signal en fonction des échantillons précédents et suivants. Ce système est-il causal ? (justifier)

2) En quoi la troncature d'une réponse impulsionnelle modifie-t-elle la réponse fréquentielle ?

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être justifiées.

2.1 Analyse d'un filtre numérique (7,5 points)

La figure 3 représente le diagramme pôles-zéros d'un filtre numérique. Les zéros et les pôles ont pour modules respectifs λ et μ et pour arguments respectifs $\pm\alpha$ et $\pm\beta$.

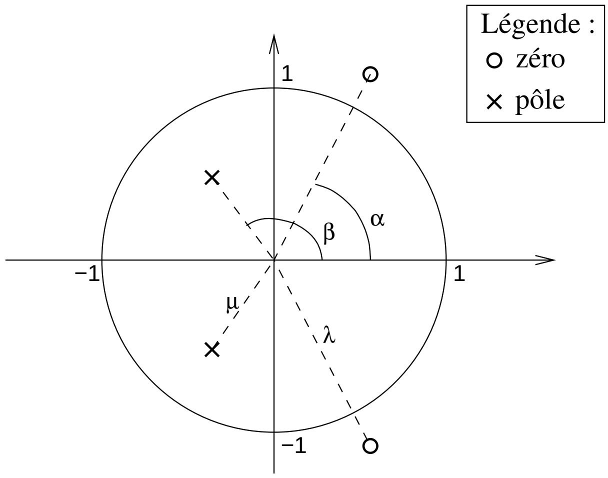

FIG. 3 – Diagramme pôles-zéros.

1) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

2) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

en précisant les valeurs des coefficients. **La suite de l'exercice peut toutefois être faite sans connaître ces valeurs.**

3) Ecrire l'équation aux différences et dessiner la structure du filtre.

4) Ce filtre est implanté sur un processeur de traitement de signal (DSP), dont l'opération de base est la multiplication-accumulation (MAC), de type $y = ax + b$. Le processeur peut effectuer 1 MAC en 1 cycle d'horloge.

a) Quelle est la complexité du filtre en nombre de MAC ?

b) On dispose d'un processeur de fréquence d'horloge 10 MHz. Quelle est la fréquence maximale d'échantillonnage du signal ?

2.2 Echantillonnage (5,5 points)

Un signal $x(t)$, dont le spectre d'amplitude $|X(\nu)|$ est représenté sur la figure 4, a été échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1/T_e$, qui respecte le théorème de Shannon. A partir des échantillons $x[n]$, on peut théoriquement reconstruire parfaitement le signal continu $x(t)$, selon la formule d'interpolation suivante :

$$x(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \mathrm{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n) \quad (1)$$

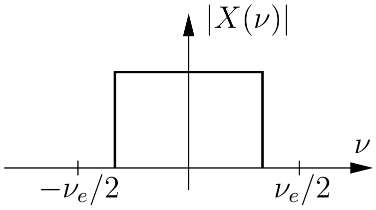

FIG. 4 – Spectre d'amplitude de $x(t)$.

1) Dans le cas pratique où l'on souhaite reconstruire le signal continu au fur et mesure que l'on reçoit les échantillons $x[n]$ (communication téléphonique par exemple), expliquer pourquoi cette formule n'est pas utilisable.

2) On utilise alors un *échantillonneur bloqueur*, qui reconstruit $x(t)$ "en escalier" à partir des valeurs $s[n]$ successives, comme illustré sur la figure 5. Le signal reconstruit $\hat{x}(t)$ s'exprime alors :

$$\hat{x}(t) = x[n] = x(nT_e) \quad \forall\, t \in [nT_e ; (n+1)T_e]$$

On peut ainsi représenter $\hat{x}(t)$ comme une somme d'impulsions rectangulaires pondérées par les échantillons $x[n]$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] h(t - nT_e)$$

où h représente une fonction porte, qui vaut 0 partout sauf entre 0 et T_e.

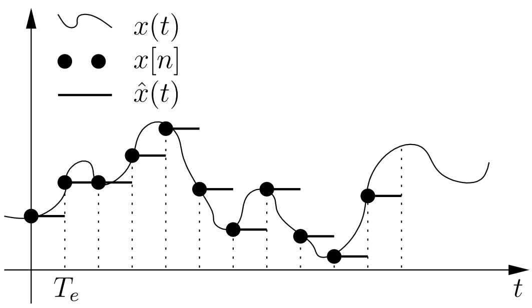

FIG. 5 – Reconstruction de $x(t)$ par un échantillonneur bloqueur.

a) Montrer que le spectre de $\hat{x}(t)$ vaut :

$$\hat{X}(\nu) = H(\nu) X_e(\nu)$$

où $X_e(\nu)$ désigne le spectre du signal échantillonné. On rappelle que $\mathrm{TF}[x(t-a)] = X(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}$.

b) Sachant que $|H(\nu)| = T_e|\mathrm{sinc}(\pi\nu T_e)|$ (voir figure 6), représenter le spectre d'amplitude du signal reconstruit, $|\hat{X}(\nu)|$. Comment cela se traduit-il physiquement (par exemple pour un signal sonore) ? Comment peut-on éviter une partie de cette altération du signal reconstruit ?

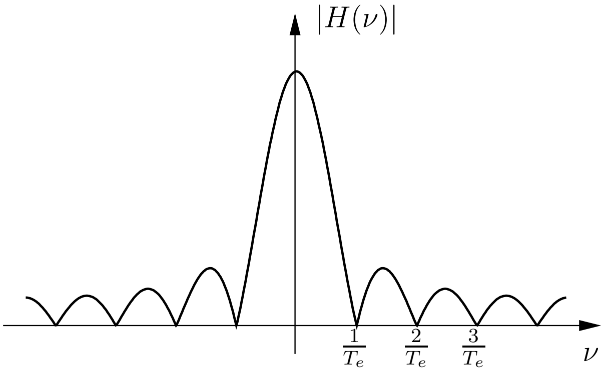

FIG. 6 – Spectre d'amplitude d'une fenêtre rectangulaire de longueur T_e.