M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Examen 2e session - Durée : 2h

12 juin 2008

Documents et calculatrices autorisés, téléphones interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie.

1 Questions de cours (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ apériodiques d'énergie finie. On note $\Gamma_{xy}(\tau)$ la corrélation entre x et y. Si $\Gamma_{xy}(\tau)$ est maximal en $\tau = 1$ s, qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

b) L'espérance d'un signal $x(t)$ aléatoire stationnaire se calcule de manière générale par :

$$\mathrm{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x$$

ce qui suppose de disposer d'un modèle probabiliste du signal. Quel est l'intérêt de l'hypothèse d'ergodicité pour le calcul approché de l'espérance et de l'autocorrélation d'un signal stationnaire ?

c) Chacune des 3 figures ci-dessous représente soit le spectre d'amplitude soit la densité spectrale de puissance d'un signal. Pour chacune, indiquer quelle peut être la nature du signal correspondant : analogique, échantillonné, périodique, apériodique, déterministe, aléatoire, ...

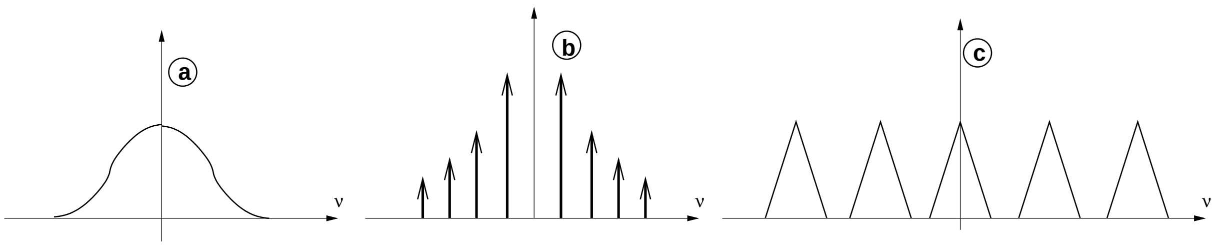

FIG. 1 –

d) Pourquoi un signal très bref ne peut-il avoir un spectre étroit ?

e) Pour un signal $x(t)$ apériodique d'énergie finie, de spectre $X(\nu)$, pourquoi appelle-t-on $|X(\nu)|^2$ la "densité spectrale d'énergie" de $x(t)$?

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être justifiées.

2.1 Analyse d'un filtre numérique (6 points)

La figure 2 représente le diagramme pôles-zéros d'un filtre numérique. Les zéros et les pôles ont pour modules respectifs λ et μ et pour arguments respectifs $\pm\alpha$ et $\pm\beta$.

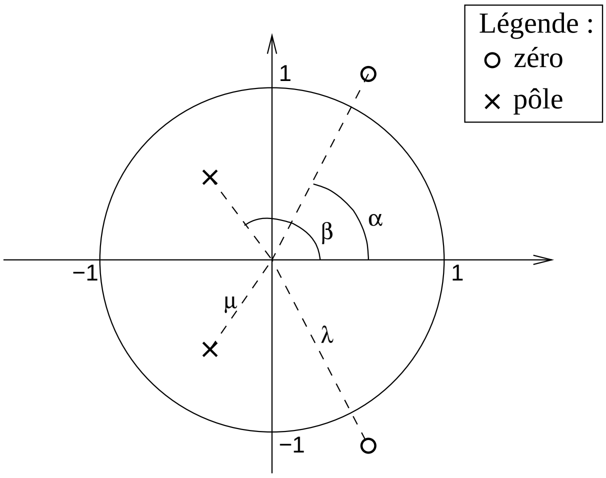

FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros.

a) Indiquez la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, ...). Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il stable ?

b) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

en précisant les valeurs des coefficients. **La suite de l'exercice peut toutefois être faite sans connaître ces valeurs.**

c) Ecrire l'équation aux différences et dessiner la structure du filtre.

2.2 Système analogique (5 points)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de réponse fréquentielle $H(\nu)$.

a) On considère à l'entrée de ce filtre le signal $s(t) = s_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}$. Montrer que la sortie vaut $y(t) = H(\nu_0)s(t)$. Rappel :

$$y(t) = h(t) \star s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)s(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

b) En déduire que la réponse du filtre au signal $s(t) = s_0 \sin(2\pi\nu_0 t)$ vaut :

$$y(t) = s_0 |H(\nu_0)| \sin(2\pi\nu_0 t + \arg H(\nu_0))$$

Rappel : $H(-\nu_0) = H^*(\nu_0)$.

c) On considère le processus de propagation unidirectionnelle d'une grandeur s dans un milieu homogène. Si, à l'abscisse 0, s suit une variation sinusoïdale $s(0,t) = s_0 \sin(2\pi\nu t)$, à l'abscisse x on a :

$$s(x,t) = s_0 \exp\Big(-\alpha\sqrt{\nu}x\Big) \sin\Big(2\pi\nu t - \alpha\sqrt{\nu}x\Big)$$

Quelle est la réponse fréquentielle du milieu considéré entre les abscisses 0 et x ? Dessiner son module en dB. De quel type de filtre s'agit-il ?

2.3 Analyse spectrale (4 points)

On souhaite analyser numériquement, par FFT après un échantillonnage à 48 kHz, le spectre d'amplitude des notes jouées par un instrument de musique. Pour chaque note, ce spectre est théoriquement un spectre de raies (harmoniques) espacées d'une fréquence F_0 qui dépend de la note, avec une décroissance d'amplitude de l'ordre de $1/\nu^{2,5}$, comme représenté sur la figure 3. L'écart de niveau, en dB, entre la raie d'ordre n et la raie d'ordre $n+1$ est donc de $50 \log(1 + 1/n)$. Les notes considérées s'étendent de LA_0 ($F_0 = F_{0\_\min} = 55$ Hz) à LA_4 ($F_0 = F_{0\_\max} = 880$ Hz).

Quelle fenêtre d'analyse (type et longueur minimale) faut-il utiliser pour observer le spectre du signal avec une résolution suffisante en amplitude et en fréquence, quelle que soit la note jouée ? Pour déterminer la résolution en amplitude nécessaire, on supposera que l'étalement du spectre de chaque n^{eme} raie induit par le fenêtrage est négligeable au-delà des deux raies adjacentes ($n-1$ et $n+1$).

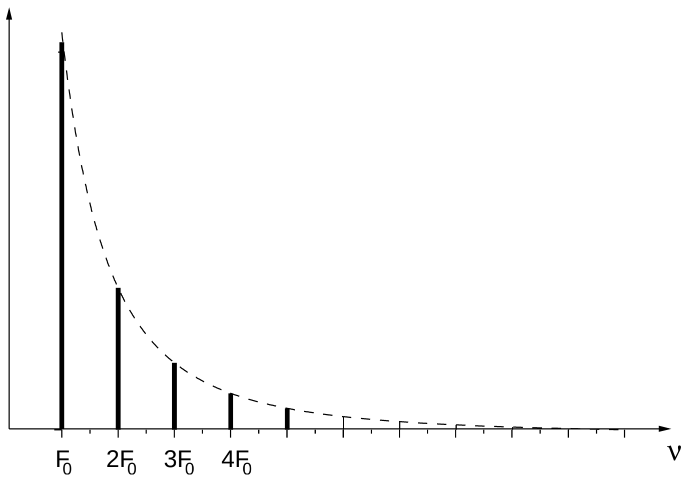

FIG. 3 – Spectre d'une note de fréquence fondamentale F_0

3 Annexes

$\log(2) \simeq 0.3$

Type de fenêtre	Atténuation du lobe secondaire relativement au lobe principal	Largeur du lobe principal en fréquence normalisée
Recangulaire	-13 dB	$2/N$
Triangle (Bartlett)	-25 dB	$4/N$
Hanning	-31 dB	$4/N$
Hamming	-41 dB	$4/N$
Blackman	-57 dB	$6/N$

TAB. 1 – Caractéristiques des principales fenêtres