M1 info : Bases du Traitement du Signal et des Images
Examen final - Durée : 2h

12 juin 2013

Documents et téléphones interdits, calculatrices autorisées.

Les différentes parties peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même partie dans la copie.

1 Questions de cours signal (5 points)

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

a) Qu'est-ce qui différencie le spectre d'un signal périodique du spectre d'un signal apériodique d'énergie finie ?

b) Qu'est-ce que la réponse impulsionnelle d'un filtre ?

c) Enoncez le théorème de Shannon.

d) Pourquoi représente-t-on le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence ν_e uniquement entre $-\nu_e/2$ et $\nu_e/2$?

e) Soient un signal discret x de durée finie N et un filtre de réponse impulsionnelle h de longueur N. Quel signal a pour Transformée de Fourier Discrète (TFD) : $\mathrm{TFD}[h]\mathrm{TFD}[x]$? Comment faire pour que $\mathrm{TFD}[h]\mathrm{TFD}[x] = \mathrm{TFD}[h \star x]$? ($\star$ désignant le produit de convolution linéaire)

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Image (7 points)

Sur la figure suivante, pouvez vous expliquer le type d'opérateurs de traitement d'images qui ont été appliqués sur l'image originale (A) pour obtenir les images ou figures B, C, D, E, F, G. Proposez une légende détaillée pour les images B, C, D, E, F, G.

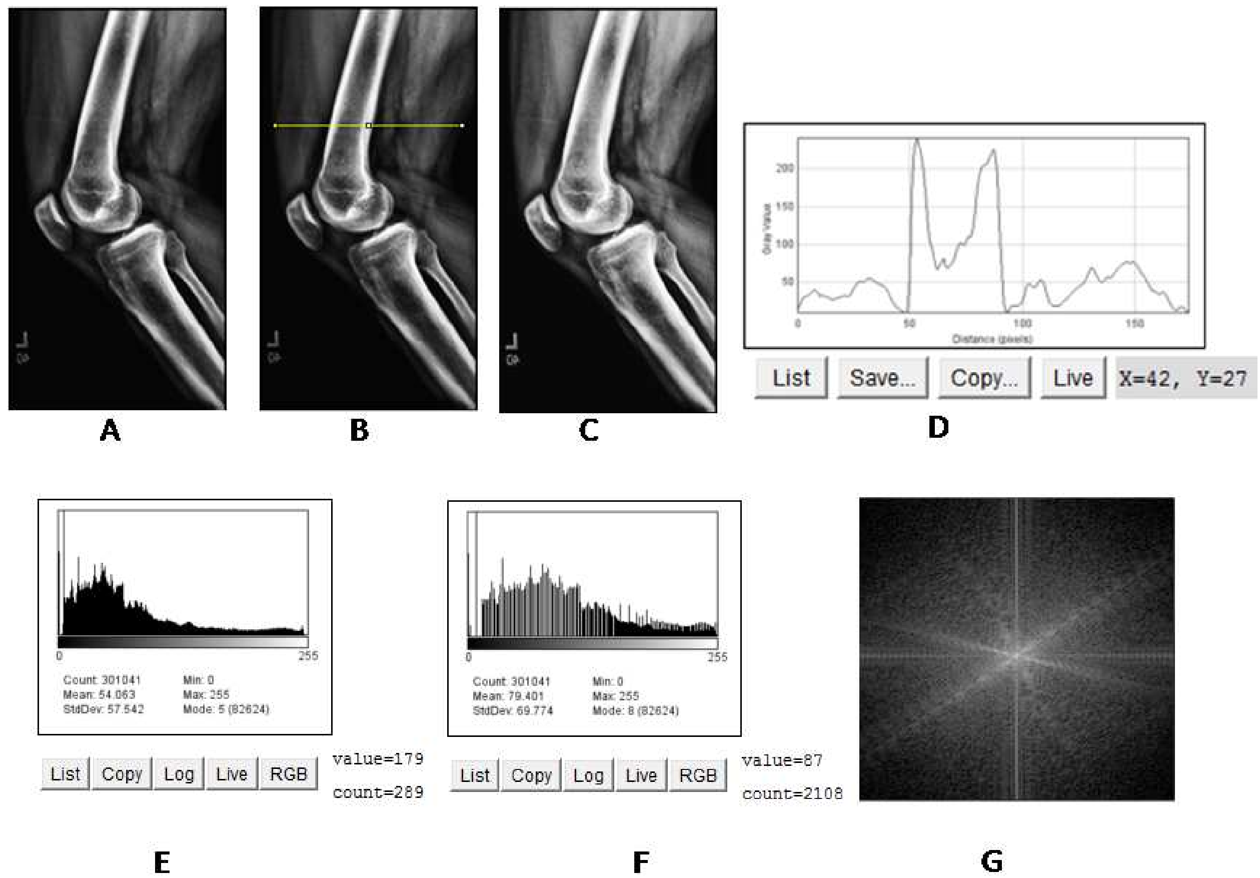

FIG. 1 – Figure de l'exercice image.

- Pouvez-vous expliquer quels types d'informations vous pouvez déduire de ces images ou figures ?
- Quel(s) type(s) de traitement proposeriez vous pour extraire les contours ? pour éliminer le bruit ?

2.2 Analyse spectrale (3 points)

Soit un signal constitué de 3 sinusoïdes, dont le spectre théorique est représenté sur la figure 2 (fréquences positives uniquement). Ces sinusoïdes ont pour fréquences respectives $\nu_1 = 5000$ Hz, $\nu_2 = 5150$ Hz et $\nu_1 = 5300$ Hz.

Le signal est échantillonné pendant 35 ms, à 16 kHz. De combien d'échantillons dispose-t-on ainsi ? On souhaite visualiser son spectre à partir de cette séquence, par FFT (transformée de Fourier rapide). Comment s'y prendre, pour avoir une résolution suffisante en amplitude et en fréquence ? **(justifiez votre réponse)**

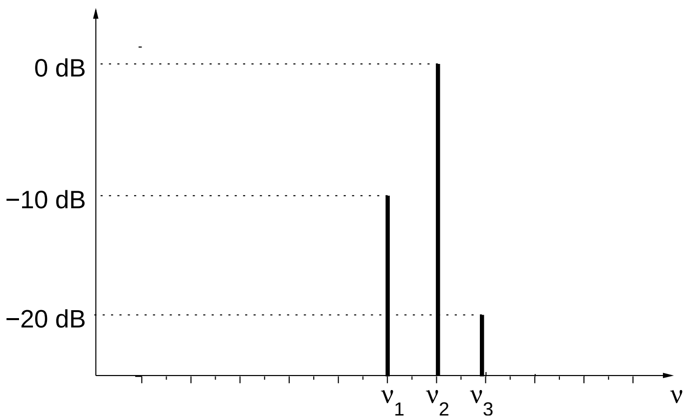

FIG. 2 – Spectre de trois sinusoïdes

2.3 Etude de filtres numériques (5 points)

a) Mettre en relation chaque diagramme Zi de pôles-zéros de la figure 3 avec une réponse fréquentielle Fj de la figure 4, **en justifiant vos choix.** Indiquez pour chaque filtre s'il est stable et pourquoi.

b) Ecrire la fonction de transfert $H(z)$ correspondant au diagramme pôles-zéros Z2 sous la forme $\pi_i(z - z_i)/\pi_j(z - p_j)$, en considérant que le pôle représenté est un pôle triple. Mettez $H(z)$ sous la forme $H(z) = \sum_{i=1}^{3} a_i z^{-i}$. *La suite peut être faite sans connaître les valeurs des* a_i.

c) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? (justifier)

d) Ecrivez l'équation aux différences du filtre.

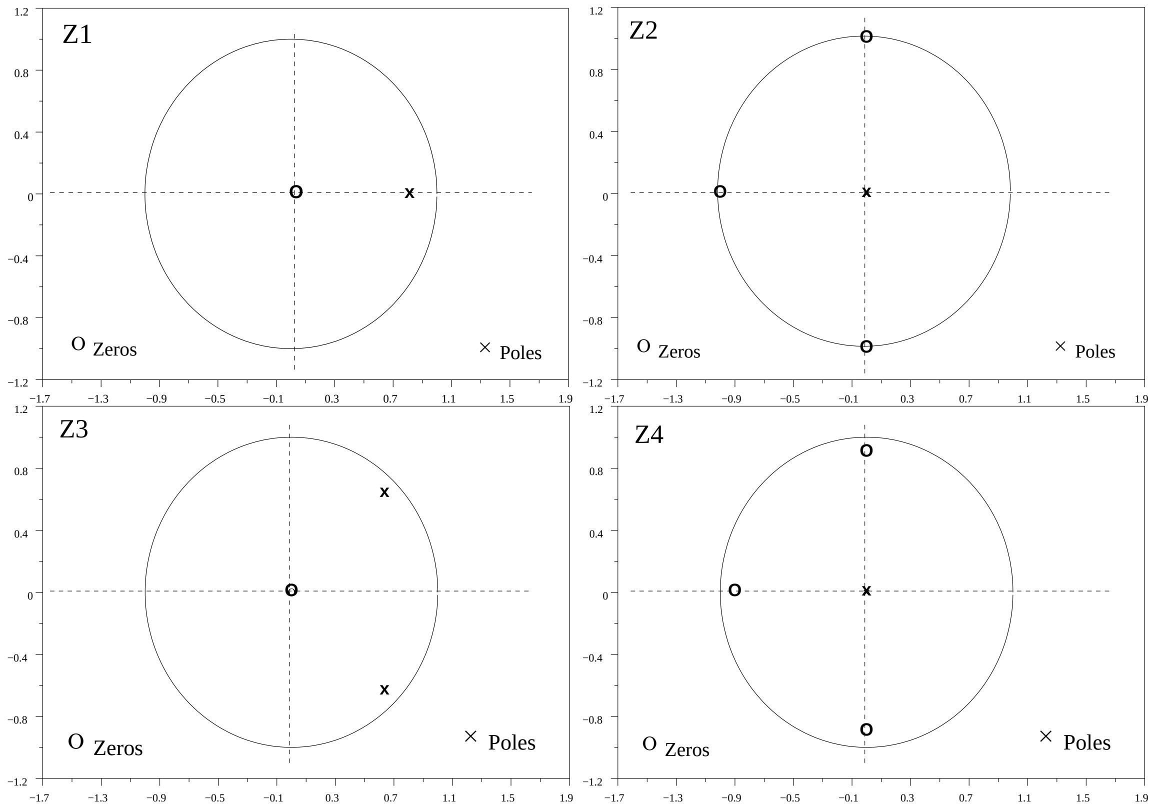

FIG. 3 – Diagrammes pôles-zéros

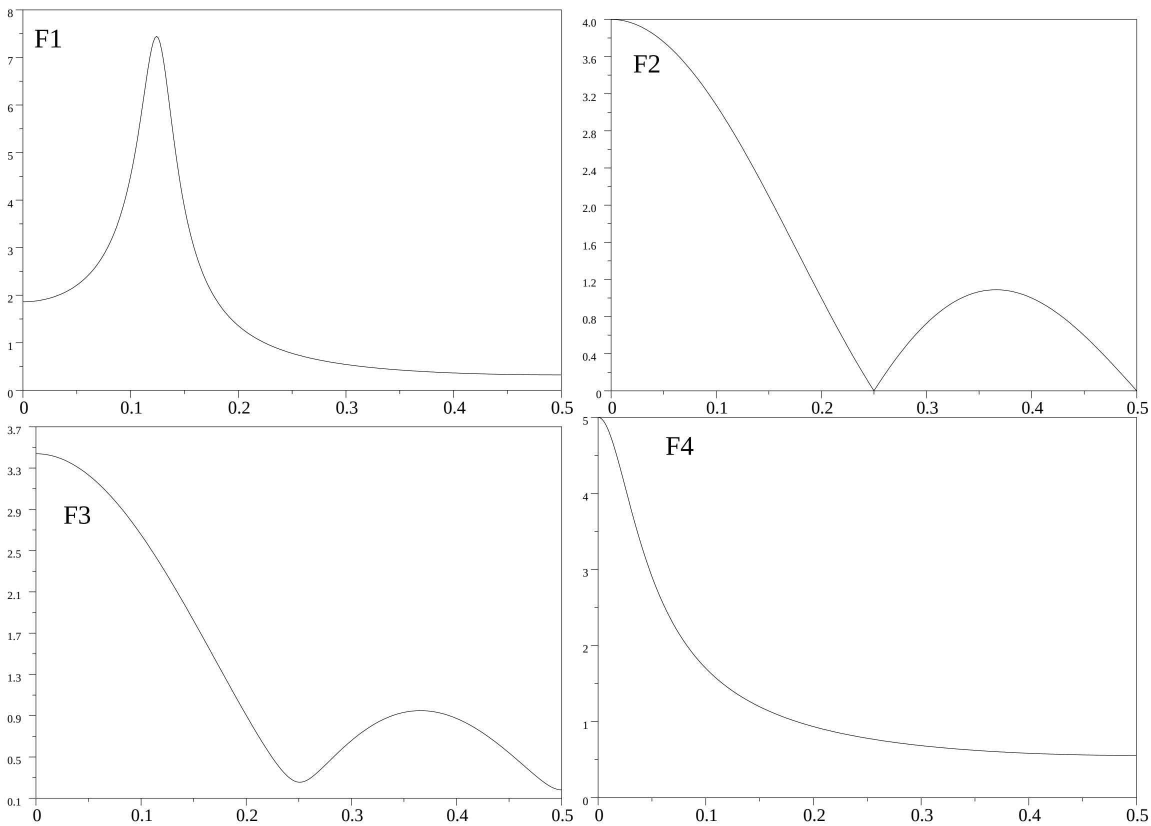

FIG. 4 – Réponses fréquentielles (fréquences normalisées positives)

3 Formulaire

Trigonométrie :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}\,, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

Transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] &= TF[x(t)].TF[y(t)] \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a} S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu - \nu_0) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] &= (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu) \\
\delta(t) &= \mathrm{TF}^{-1}[1] \\
\delta(\nu) &= \mathrm{TF}[1] \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu - \nu_0)
\end{aligned}$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Soit $x(t)$ un signal apériodique d'énergie finie. Autocorrélation de $x(t)$:

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

Sa transformée de Fourier : $\mathrm{TF}[\Gamma_x(\tau)] = |X(\nu)|^2$
Théorème de Parseval :

$$E = \Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec :} \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Convolution :

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ x * \delta &= x \\ x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Reconstruction parfaite d'un signal :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$

Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57