M1 informatique : Traitement du signal et des images

Examen final - Durée : 2h

12 juin 2014

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les différentes sous-parties peuvent être traitées dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

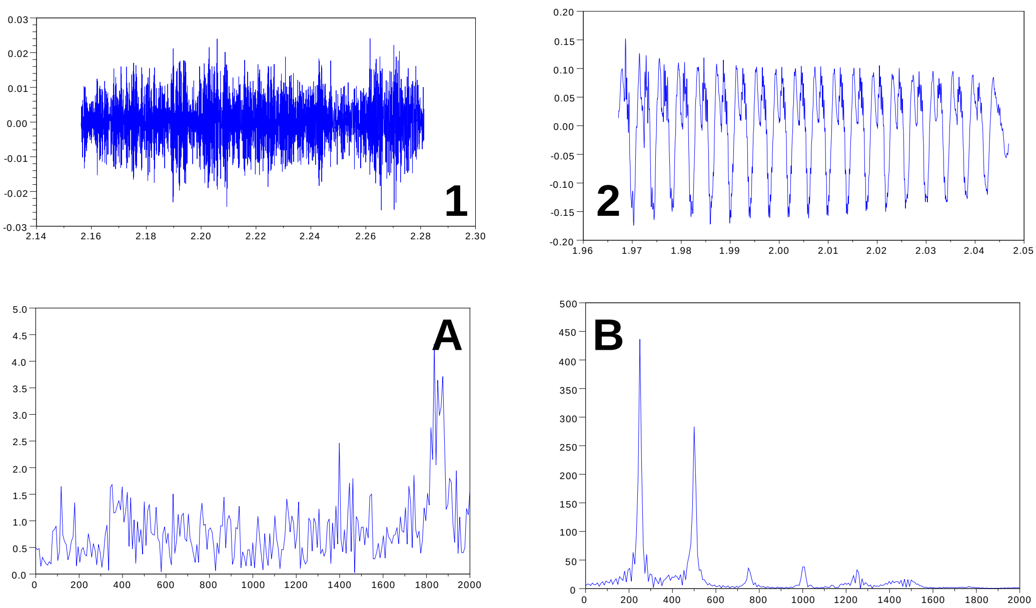
1 Questions de cours

1.1 Signaux 1D (3 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes, mais clairement justifiées.

a) Sur la figure 1 sont représentés deux signaux temporels, 1 et 2, et deux spectres d'amplitude, A et B. Indiquer quel spectre peut correspondre à quel signal, en justifiant votre réponse.

signaux temporels



spectres d'amplitude

FIG. 1 – Appariement signal / spectre.

b) Soit une fonction de la fréquence $X(\nu)$, non nulle sur un intervalle $[-B; B]$ et qui s'annule pour toute fréquence $\nu > B$ ou $\nu < -B$. Pourquoi cette fonction ne peut-elle être le spectre d'un signal échantillonné ?

c) Enoncez le théorème de Shannon.

1.2 Image (x points)

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Image (x points)

2.2 Filtrage numérique 1D (4 points)

Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = -\rho\sqrt{2}y(n-1) - \rho^2 y(n-2) + x(n) + \sqrt{2}x(n-1) + x(n-2)$$

Son diagramme pôle-zéros est représenté sur la figure 2.

FIG. 2 – Diagramme pôles-zéros du filtre.

a) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer sa fonction de transfert et en déduire sa réponse fréquentielle.

b) Le filtre est-il stable ou instable ? (justifier)

c) Dessinez l'allure de sa réponse fréquentielle.

d) Calculer la valeur de la réponse fréquentielle pour la fréquence normalisée $f = 1/4$.

e) On filtre un signal composé de deux sinusoïdes, de fréquences respectives 1/8 et 1/4 (en fréquences normalisées). Quel est le signal en sortie du filtre ?

2.3 Echantillonnage 1D (3 points)

Pour certaines applications comme la réduction de bruit ou le codage, on applique aux signaux audio un traitement différencié par bande de fréquence. A cet effet, le signal est décomposé en N signaux à bande étroite par un banc de $N-1$ filtres passe-bande et 1 filtre passe-bas, selon le schéma de la figure ci-dessous. On considère ici une décomposition en 4 sous-bandes et un signal de spectre triangulaire s'étendant sur une bande limitée $[-B; B]$.

Le signal $x_3(t)$ de la 3ème bande a ainsi le spectre d'amplitude représenté sur la figure 4.

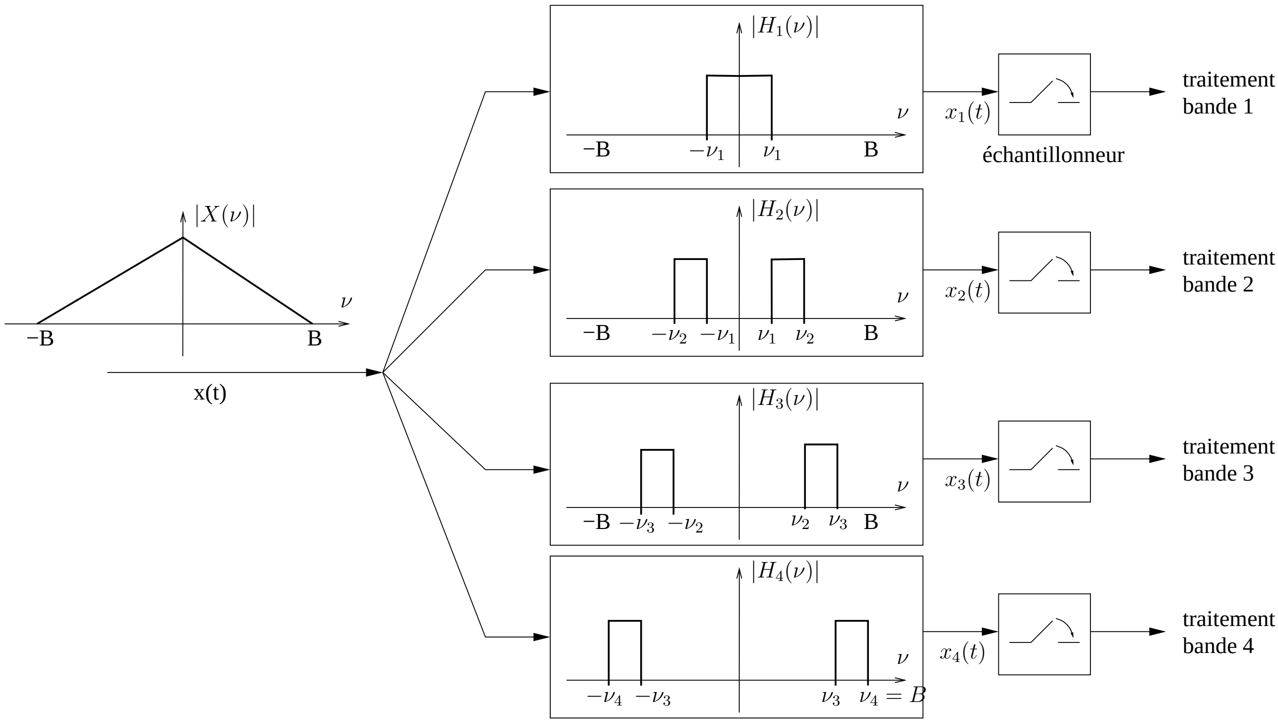


FIG. 3 – Traitement d'un signal par sous-bandes.

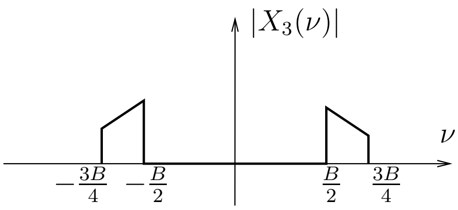


FIG. 4 – Spectre d'amplitude du signal de la 3ème bande.

a) D'après le théorème de Shannon, quelle fréquence d'échantillonnage permet un échantillonnage sans perte d'information sur la 3ème bande ?

b) On échantillonne $x_3(t)$ à la fréquence d'échantillonnage $B/2$. Tracer le spectre d'amplitude du signal échantillonné, noté $X_3^e(\nu)$. Comment peut-on récupérer l'information du signal x_3 original ?

c) Chaque bande subit, après l'échantilonnage, un traitement numérique qui nécessite K opérations par échantillon. Quel est l'intérêt de la réduction de la fréquence d'échantillonnage ?

2.4 Analyse spectrale numérique (3 points)

Soit un signal composé de deux sinusoïdes, dont le spectre, en décibels, est représenté sur la figure 5. On fixe $\Delta_f = 0.02$, en fréquence normalisée. On souhaite faire une analyse spectrale du signal à partir d'une séquence de N échantillons.

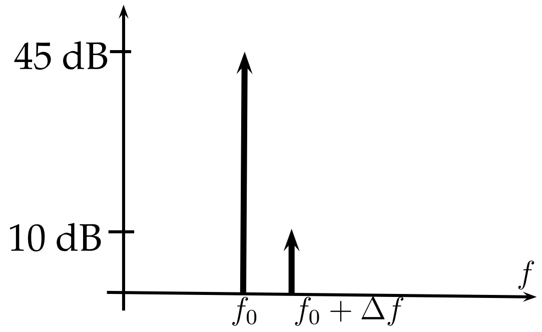


FIG. 5 – Spectre d'amplitude du signal.

a) Par quel type de fenêtre (rectangle, triangle, Hamming, Hanning, Blackman...) faut-il pondérer la séquence pour avoir une finesse en amplitude suffisante ?

b) Quelle doit être la valeur minimale de N pour avoir une finesse en fréquence suffisante ? Si l'on calcule le spectre par transformée de Fourier rapide (FFT), par combien de 0 faut-il compléter les N échantillons du signal ?

3 Formulaire

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

– Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

– Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$
Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

– Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

– Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57