

# M1 IPCC : Bases du Traitement du Signal

## TD2 : Signaux aléatoires

### 1 Codage NRZ

Des données binaires peuvent être transmises en bande de base (sans modulation) en utilisant un code NRZ (non-retour à zéro) : chaque bit est émis pendant une durée  $T_b$ , par un signal  $s(t)$  valant -1 pour 0, +1 pour 1. Si l'on note  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des bits émis,

$$s(t) = S_n \in \{-1; +1\} \forall t \in [nT_b; (n+1)T_b] \quad (1)$$

On considère généralement que les  $S_n$  sont indépendants et identiquement distribués (autant de +1 que de -1), ce qui implique que  $\overline{S_n S_{n+k}} = 1$  pour  $k = 0$ , 0 sinon.

L'autocorrélation de  $s$  est définie par :

$$\Gamma_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)s(t-\tau) dt \quad (2)$$

En segmentant l'intégrale bit par bit, on obtient :

$$\Gamma_s(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} \int_{nT_b}^{(n+1)T_b} s(t)s(t-\tau) dt = \overline{\int_{nT_b}^{(n+1)T_b} s(t)s(t-\tau) dt} \quad (3)$$

1. Pour  $\tau \leq T_b$ , en décomposant judicieusement l'intégrale et en utilisant la relation (1), calculer  $\Gamma_s(\tau)$  (voir figure ci-dessous).

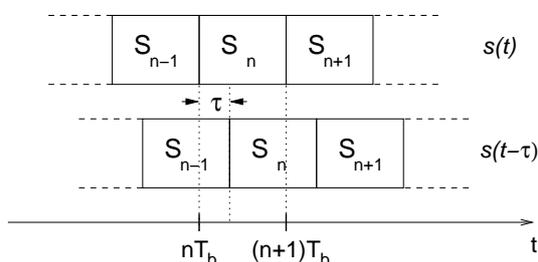


FIG. 1 – Séquences  $(S_n)$  décalées de  $\tau$



2. Supposons maintenant que  $\tau \geq T_b$ . En exprimant  $\tau$  sous la forme  $\tau = kT_b + \theta$ , avec  $k$  entier  $\geq 1$  et  $\theta \leq T_b$ , calculer  $\Gamma_s(\tau)$  (on pourra s'aider d'une figure similaire à la précédente). Tracer alors  $\Gamma_s(\tau)$  pour  $\tau \in \mathbb{R}$ .

3. La figure 2 représente une fonction triangle et sa transformée de Fourier, qui a pour expression :

$$\gamma_T(\nu) = T \operatorname{sinc}^2(\nu T) = T \left( \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T} \right)^2 \quad (4)$$

En déduire la densité spectrale de puissance (DSP) d'un code NRZ de durée de bit  $T_b$ . En considérant qu'une ligne téléphonique a une bande passante de 3400 Hz et en négligeant la puissance contenue dans les lobes secondaires de la DSP, quel est le débit maximal de transmission des données par un codage NRZ sur une telle ligne ?

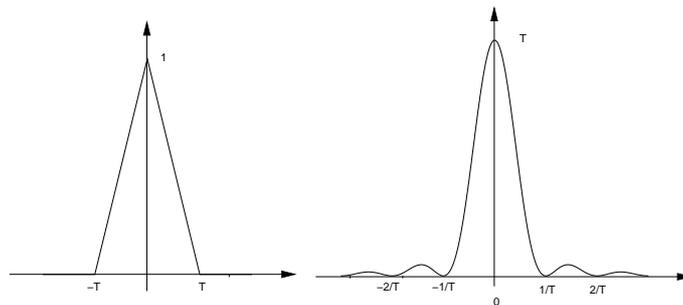


FIG. 2 – Fonction triangle et sa transformée de Fourier

## 2 Propriétés de la densité spectrale de puissance

D'après le théorème de Wiener-Khinchine, la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire est la transformée de Fourier de son autocorrélation :

$$\gamma_x(\nu) = \text{TF}[\Gamma_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau$$

- 1) En développant l'exponentielle, montrer que  $\gamma_x(\nu) \in \mathbb{R}$ .
- 2) Montrer alors que  $\forall \nu, \quad \gamma_x(-\nu) = \gamma_x(\nu)$

### Sources

- Hwei Hsu, "Signaux et Communications" 2e ed. (Schaum), Dunod / Ediscence, 2004.
- A. Quinquis, "Signal déterministe, signal aléatoire : exercices et problèmes corrigés", Hermès, Paris, 1999.