M1 IPCC : Bases du Traitement du Signal

TD Signaux échantillonnés

1 Effet du sous-échantillonnage

On échantillonne à 500 échantillons par seconde un signal réel à temps continu qui est la somme de 3 sinusoïdes de fréquences respectives 50 Hz, 100 Hz et 300 Hz.

– Dessiner le spectre d'amplitude du signal analogique
– Dessiner le spectre du signal échantillonné. A partir de ces échantillons on reconstuit par le filtre de reconstruction parfaite un signal à temps continu. Quel est le signal obtenu ?

2 Analyse spectrale d'un signal (sous-)échantillonné

On dispose d'un signal à temps discret $x[n]$ provenant de l'échantillonnage à 10 000 Hz d'un signal à temps continu $x(t)$. Le spectre d'amplitude du signal échantillonné, $|X_e(f)|$ est représenté sur la figure 1, pour les fréquences normalisées $f = 0$ à 1/2. On observe une raie pour $f = 0.4$.

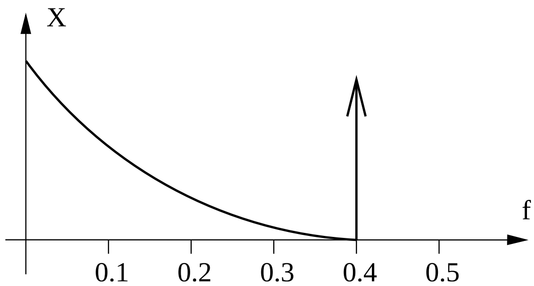

FIG. 1 – Spectre du signal échantillonné.

a) En supposant que le signal a été correctement échantillonné, quelle est la fréquence de la raie dans le signal analogique initial ?

b) Sans écarter la possibilité d'un sous-échantillonnage, à quelle(s) raies fréquentielles du signal original peut correspondre cette raie à $f = 0.4$?

Source : Poly "Bases du traitement du signal", Maurice Charbit, ENST, 2004.

3 Reconstruction

1) La formule de reconstruction parfaite :

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \mathrm{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n)$$

permet-elle de reconstruire le signal en temps réel, c'est-à-dire de calculer $x(t)$ pour tout $t \leq nT_e$ dès réception de $x[n] = x(nT_e)$?

2) Comme la fonction sinc décroît très rapidement, on peut approcher la somme précédente par une somme finie de $2N$ termes. Ecrire cette somme pour t compris entre deux instants d'échantillonnage n_0T et $(n_0 + 1)T$. Quel est alors le délai de reconstruction ?

3) En pratique, on utilise un échantillonneur bloqueur. Le bloqueur d'ordre 0 reconstruit $x(t)$ "en escalier", comme indiqué sur la figure 2. Le signal analogique reconstruit peut alors s'écrire comme une somme d'impulsions rectangulaires :

$$\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_e) r_{Te}(t - nT_e)$$

avec :

$$r_{Te}(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in [-T_e/2; T_e/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

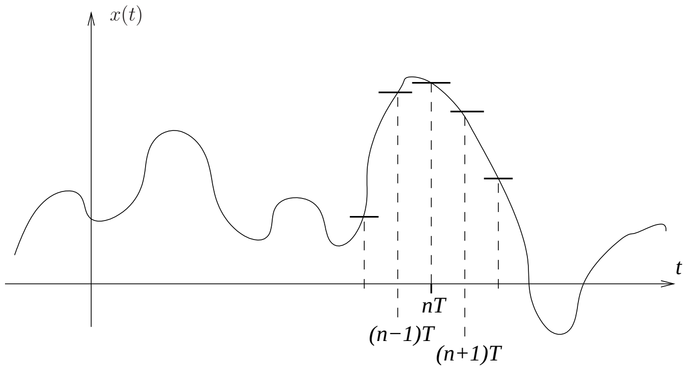

FIG. 2 – Reconstruction par un échantillonneur bloqueur.

Calculez le spectre $\hat{X}(\nu)$ du signal reconstruit. Soit $x(t)$ un signal dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 3. Dessinez le spectre d'amplitude $|\hat{X}(\nu)|$ du signal reconstruit. Comment peut-on récupérer le signal original ?

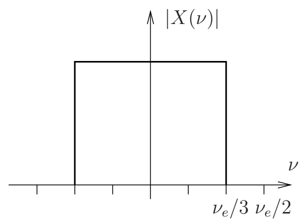

FIG. 3 – Spectre du signal analogique.