

Mouvement brownien et algèbres de Kac–Moody affines

Manon Defosseux

6 novembre 2020

MAP5, Université de Paris

1) Théorème de Pitman

Soit $\{b_t, t \geq 0\}$ un brownien réel standard

Un théorème de Pitman (1975) :

$\{b_t - 2 \inf_{s \leq t} b_s, t \geq 0\}$ est un processus de Bessel de dimension 3

Prolégomènes

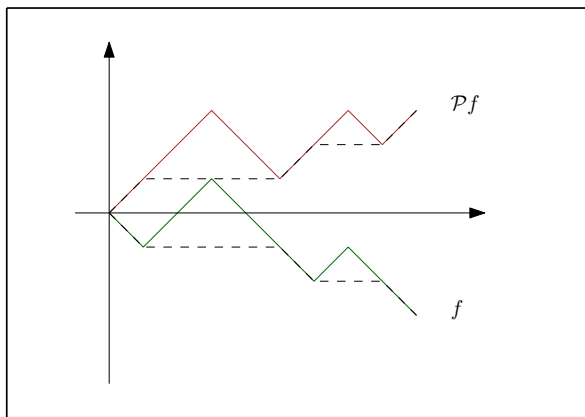


Figure – Transformation de Pitman $\mathcal{P}f(t) = f(t) - 2 \inf_{s \leq t} f(s)$

Semi-groupe :

$$q_t(x, y) = \frac{h(y)}{h(x)} p_t^0(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*, t \geq 0, \quad h(x) = x,$$

$$p_t^0(x, y) = p_t(x, y) - p_t(x, -y) = p_t(x, y) + \det(s_0) p_t(x, s_0(y))$$

\mathbb{R}_+ , **domaine fondamental pour** $\{s_0, s_0^2 = I\} = \langle s_0 \rangle$.

2) Brownien dans $[0, 1]$

Semi-groupe :

$$q_t^{\mathcal{I}}(x, y) = \frac{\sin \pi y}{\sin \pi x} e^{t\pi^2/2} p_t^{\mathcal{I}}(x, y), \quad x, y \in (0, 1), t \geq 0,$$

$$p_t^{\mathcal{I}}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_t(x, y + 2k) - p_t(x, -y + 2k))$$

$[0, 1]$, **domaine fondamental pour** $\langle s_0, s_1 \rangle$

Le début de l'histoire...

II - Bessel 3 et SU(2)

1) Quelques diagrammes commutatifs

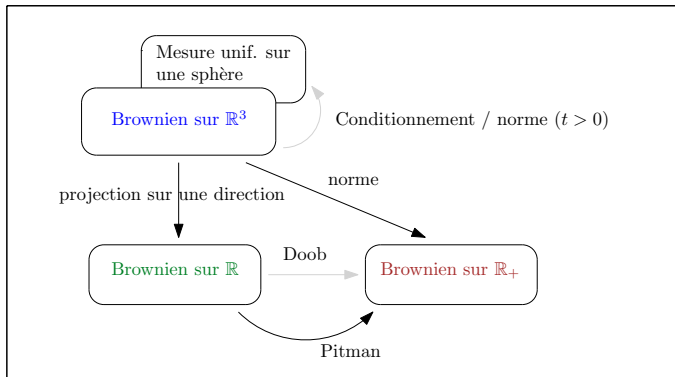


Figure – Bessel 3

II - Bessel 3 et SU(2)

$$SU(2) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : MM^* = I, \det(M) = 1\}$$

$$\mathfrak{su}(2) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : M + M^* = 0, \operatorname{tr}(M) = 0\},$$

$$= \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

II - Bessel 3 et SU(2)

$$\text{Ad}(g)M = gMg^{-1}, \quad g \in \text{SU}(2), \quad M \in \mathfrak{su}(2)$$

$$(M|N) = \frac{1}{2} \text{Tr}(MN^*), \quad M, N \in \mathfrak{su}(2)$$

$$M = ax + by + cz \sim \begin{pmatrix} i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{pmatrix},$$

II - Bessel 3 et SU(2)

$$\text{Ad}(g)M = gMg^{-1}, \quad g \in \text{SU}(2), \quad M \in \mathfrak{su}(2)$$

$$(M|N) = \frac{1}{2} \text{Tr}(MN^*), \quad M, N \in \mathfrak{su}(2)$$

$$M = ax + by + cz \sim \begin{pmatrix} i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{pmatrix},$$

Partie radiale :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} z \in \left\{ \begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & -ir \end{pmatrix} : r \geq 0 \right\} = \mathbb{R}_+ z$$

II - Bessel 3 et $SU(2)$

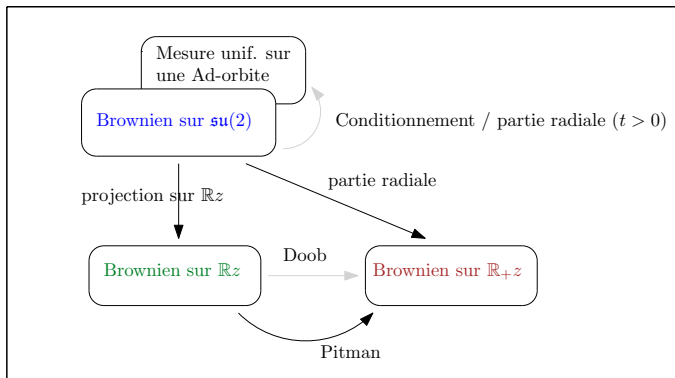


Figure – Bessel 3 et $SU(2)$

Remarque : $\mathbb{E}(e^{i(B_t|u)} | \text{rad}(B_t) = \lambda) = \frac{\sin(\lambda|u)}{(\lambda|u)}$

2) Représentations complexes de $\mathfrak{su}(2)$ et Bessel 3 discret

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2) = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Représentations irréductibles :

$\lambda \in \mathbb{N}$, $V_\lambda = \text{Vect}\{v_0, \dots, v_\lambda\}$,

$$\rho_\lambda(h)v_i = (\lambda - 2i)v_i,$$

$$\rho_\lambda(e)v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1},$$

$$\rho_\lambda(f)v_i = (i + 1)v_{i+1}$$

$i \in \{0, \dots, \lambda\}$, $v_{-1} = v_{\lambda+1} = 0$.

Poids et plus haut poids $P = \mathbb{Z}$, et $P^+ = \mathbb{N}$

Caractère

$$\text{ch}(V_\lambda)(p) = \sum_{i=0}^{\lambda} p^{\lambda-2i} = \frac{p^{\lambda+1} - p^{-(\lambda+1)}}{p - p^{-1}} = s_\lambda(p), \quad \lambda \in \mathbb{N}^*$$

Marche aléatoire

$$\mu_\lambda(z) = \frac{p^z}{s_\lambda(p)}, \quad z \in \{\lambda - 2i, i \in \{0, \dots, \lambda\}\}, \quad \mu_1(\pm 1) = \frac{p^{\pm 1}}{p + p^{-1}}$$

μ_1 , loi des accroissements d'une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{Z} .

II - Bessel 3 et SU(2)

Produit de caractères, $\lambda \in \mathbb{N}$, $p > 0$,

$$s_\lambda(p)s_1(p) = s_{\lambda-1}(p) + s_{\lambda+1}(p), \quad s_{-1}(p) = 0$$

$$1 = \frac{s_{\lambda-1}(p)}{s_\lambda(p)s_1(p)} + \frac{s_{\lambda+1}(p)}{s_\lambda(p)s_1(p)}$$

Chaîne de Markov $(Y_n)_{n \geq 0}$ de noyau de transition

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \beta) &= \frac{s_\beta(p)}{s_\lambda(p)s_1(p)} \mathbf{1}_{|\lambda-\beta|=1}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{N} \\ &= \frac{\beta+1}{2(\lambda+1)} \mathbf{1}_{|\lambda-\beta|=1}, \quad \text{pour } p = 1. \end{aligned}$$

II - Bessel 3 et SU(2)

Quand $n \rightarrow \infty$

$\{\frac{1}{\sqrt{n}}X_{[nt]}, t \geq 0\} \rightarrow$ Brownien réel

$\{\frac{1}{\sqrt{n}}Y_{[nt]}, t \geq 0\} \rightarrow$ Bessel 3

1) Algèbre affine $A_1^{(1)}$

$$\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathcal{L}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \oplus \mathbb{C}c, \quad \widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^* = \mathcal{L}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0.$$

$$\mathcal{L}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \{f : \theta \in S^1 \rightarrow f(\theta) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\}.$$

2) La base du diagramme

Une sous algèbre de Cartan $\mathcal{H} = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}h$, $\mathcal{H}^* = \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\frac{\alpha_1}{2}$

$$P = \{n\Lambda_0 + x\frac{\alpha_1}{2}, n, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$P_+ = \{n\Lambda_0 + x\frac{\alpha_1}{2}, 0 \leq x \leq n\} \cap P$$

III - Le cas affine

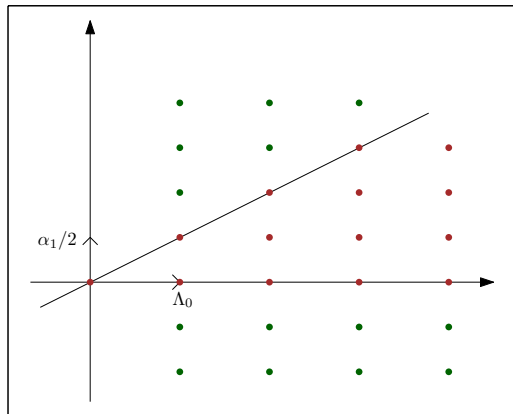


Figure – Poids et plus hauts poids

III - Le cas affine

Représentations irréductibles de plus haut poids V_λ , $\lambda \in P_+$.

Marches et chaînes sur P et P_+ :

Une mesure de proba sur les poids de V_{Λ_0} : loi des accroissements de $\{X_n : n \geq 0\}$ à valeurs dans P

Une mesure de proba sur les plus hauts poids des composantes isotypiques de $V_{\Lambda_0} \otimes V_\lambda$: noyau markovien de $\{Y_n : n \geq 0\}$ à valeurs dans P_+

Remarques :

$$X_n = n\Lambda_0 + \dots$$

$$Y_n = n\Lambda_0 + \dots$$

Renormalisation en $1/n$.

Convergence des processus, $n \rightarrow \infty$,

$$\left\{ \frac{1}{n} X_{[nt]} : t \geq 0 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \{t\Lambda_0 + b_t \alpha_1 / 2 : t \geq 0\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} Y_{[nt]} : t \geq 0 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \{t\Lambda_0 + a_t \alpha_1 / 2 : t \geq 0\}$$

$$(t, a_t) \in \mathcal{C} = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq t\}$$

III - Le cas affine

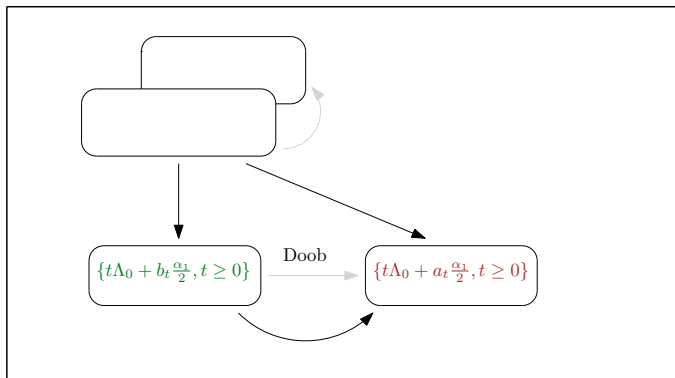


Figure – Base du diagramme

3) Le sommet du diagramme

Dans le cas de $\mathfrak{su}(2)$:

mesure de probabilité uniforme sur une orbite coadjointe
=

Loi de $(\cdot|x)$ conditionnellement à la partie radiale de x ,

où x est une gaussienne sur $\mathfrak{su}(2)$.

Dans le cas de $\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{su}(2)) \oplus \mathbb{R}c$

mesure de probabilité sur une orbite coadjointe

=

Loi de $\int_0^1 (\cdot | dx_s) + \Lambda_0$ conditionnellement à sa partie radiale,

où $\{x_s : s \geq 0\}$ est un brownien sur $\mathfrak{su}(2)$.

Le sommet du diagramme :

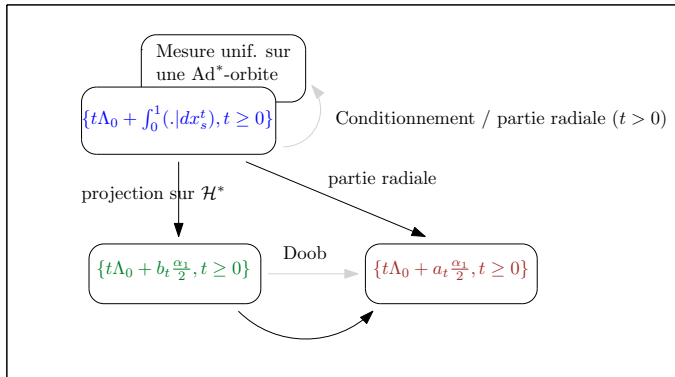
$$\left\{ \int_0^1 (\cdot | dx_s^t) + t\Lambda_0 : t \geq 0 \right\}$$

où $\{x_s^t, s \geq 0\}$ est un drap brownien sur $\mathfrak{su}(2)$, i.e. un processus gaussien tel que

$$\text{Cov}(x_{s_1}^{t_1}, x_{s_2}^{t_2}) = t_1 \wedge t_2 \text{Cov}(x_{s_1}, x_{s_2}),$$

$s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0$.

III - Le cas affine



IV - Brownien dans $[0, 1]$

$$\forall t > 0, 0 \leq f(t) \leq t \iff \forall t > 0, 0 \leq tf\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$$

$\{ta(1/t) : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \text{Brownien dans } [0, 1]$

V - Un théorème de Pitman

1) Cône \mathcal{C} dans l'espace-temps $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

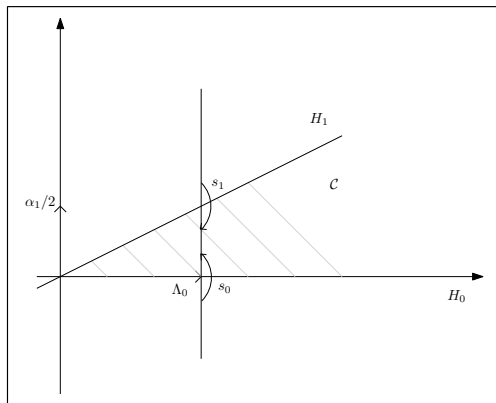
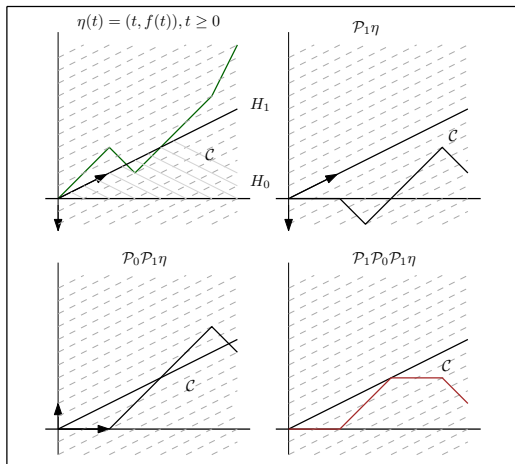


Figure – Cône \mathcal{C}

V - Un théorème de Pitman

2) Les transformations de Pitman

$$\mathcal{P}_0\eta(t) = (t, f(t) - 2 \inf_{s \leq t} f(s)) \quad \mathcal{P}_1\eta(t) = (t, f(t) + 2 \inf_{s \leq t} (s - f(s)))$$



3) Théorème de représentation à la Pitman

$$B(t) = (t, b_t), t \geq 0$$

$$\lim_n \mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_0 B(t)? \quad \text{avec } \mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_{2k} = \mathcal{P}_0,$$

V - Un théorème de Pitman

$$\mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_0 B(t) = B(t) + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(t) = 2.$$

V - Un théorème de Pitman

$$\mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_0 B(t) = B(t) + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(t) = 2.$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i + \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \text{ converge...}$$

V - Un théorème de Pitman

$$\mathcal{P}_n \dots \mathcal{P}_0 B(t) = B(t) + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(t) = 2.$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i + \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \text{ converge...}$$

$$B(t) + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i A_i(t) + (-1)^{n+1} A_{n+1}(t) \rightarrow (t, a_t)$$

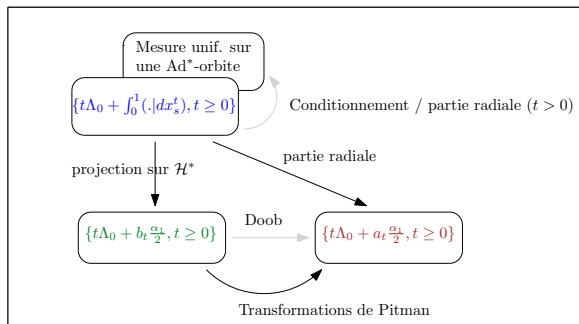
V - Un théorème de Pitman

$$\mathcal{L}_0\eta(t) = (t, f(t) - \inf_{s \leq t} f(s)),$$

$$\mathcal{L}_1\eta(t) = (t, f(t) + \inf_{s \leq t} (s - f(s)))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n \mathcal{P}_{n-1} \dots \mathcal{P}_0 B(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n \mathcal{P}_{n-1} \dots \mathcal{P}_1 B(t) = (t, a_t)$$

VI - Diagramme complet



Et maintenant ?

Théorème de Pitman général

Diagramme commutatif affine non commutatif

Fusion, modèle discret, inversion du temps et transformations de Pitman