## Exercices 1 et 2: Filtrage linéaire

**Exercice 1 (les filtres linéaires continus sont des convolutions).** On se propose dans cet exercice de démontrer (dans le cas $d = 1$ pour simplifier) la proposition suivante : si $T$ est un opérateur linéaire continu et invariant par translation de $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$), alors il existe $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ tel que $Tu = \varphi * u$ pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$.

1. On définit le Dirac discret au point $i \in \mathbb{Z}$ par $\delta_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
   Vérifier que $\delta_i \in \ell^1(\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $T$ un opérateur linéaire invariant par translation de $\ell^1(\mathbb{Z})$. On pose $\varphi = T\delta_0$. Vérifier que $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad T\delta_i(k) = \varphi(k - i).$$
3. En déduire que si $v : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est à support fini, alors $Tv = \varphi * v$.
4. Pour $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{i=-n}^{n} u(i)\delta_i$.
   Montrer que $u_n \xrightarrow{\ell^1} u$ et en déduire que $\varphi * u_n \xrightarrow{\ell^1} \varphi * u$.
5. On suppose de plus que $T$ est continu. Montrer que $Tu_n \xrightarrow{\ell^1} \varphi * u$, puis que $Tu = \varphi * u$. Conclure.

---

**Exercice 2 (identification du noyau).** Pour chaque filtre linéaire $T$ (sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$) défini ci-dessous, expliciter (sous la forme vue en cours avec les crochets) le noyau $\varphi$ tel que $Tu = \varphi * u$.

1. $\forall k, l \in \mathbb{Z}, \quad Tu(k, l) = u(k + 1, l + 1) - u(k + 1, l - 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{Z}^2, \quad Tu(x) = \displaystyle\sum_{\|y\| \leqslant 2} \frac{u(x + y)}{1 + \|y\|}$
3. $Tu = [1 \;\; 0 \;\; 2] * u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} * u$
4. $Tu = [1 \;\; 0 \;\; 2] * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} * u$