

Exercice 9 et 10: interpolation

Exercice 9 (conditions sur le noyau d'interpolation). Soit $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une image discrète, on considère l'interpolée de u définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad V(x, y) = \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2} u(k, l) \varphi(x - k, y - l),$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est à support compact et intégrable.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que l'interpolation soit exacte.
2. Montrer que si l'interpolation préserve les constantes (si $u = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$, alors $V = c$), alors $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi = 1$. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose que l'interpolation définie par φ est exacte. Montrer qu'elle est également séparable (c'est-à-dire, on retrouve $V(x, y)$ en interpolant d'abord les lignes de u , indépendamment, puis en interpolant les colonnes obtenues indépendamment, ou le contraire) si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(x, 0) \varphi(0, y).$$

Exercice 10 (zoom de facteur 2).

1. Écrire une fonction Octave $v = \text{zoom2_ppv}(u)$, qui prend en entrée une matrice u (une image), et renvoie dans la matrice v l'image de taille double obtenue par zoom de facteur 2 de u par interpolation au plus proche voisin.
Indication: on pourra utiliser la fonction Octave `kron`.
 2. Soit u une image définie sur \mathbb{Z}^2 , et $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son interpolation bilinéaire. Donner, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, l'expression de $U\left(\frac{k}{2}, \frac{l}{2}\right)$ en fonction de u , en discutant les 4 cas possibles selon la parité de k et de l . En déduire une fonction Octave $v = \text{zoom2_bilinéaire}(u)$, qui réalise le zoom de facteur 2 d'une image par interpolation bilinéaire. On traitera les problèmes aux bords en supposant que u est nulle en dehors du rectangle où elle est définie.
Note: cette fonction ne devra pas contenir de boucle.
 3. Reprendre la question 2 dans le cas de l'interpolation bicubique Keys vue en cours (on nommera `zoom2_keys()` la fonction associée).
 4. Zoomer d'un facteur 2 une partie (au choix) de taille 200×200 extraite de l'image `lena.pgm`, à l'aide des fonctions `zoom2_ppv()`, `zoom2_bilinéaire()` et `zoom2_keys()`, et comparer les résultats obtenus. On prendra soin d'utiliser la fonction `imshow2` (dans le répertoire web `iptools`) pour visualiser à pleine résolution les images obtenues.
-