Exercices 14 et 15: homographies

Exercice 14 (coordonnées homogènes et homographies).

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'espace projectif associé. Dans toute la suite, on notera $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n$ qui définit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)/\sim$, et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v}$ la classe d'équivalence de v pour $\sim$.

1. Soit A une matrice inversible d'ordre n. Montrer que
$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \bar{v} = \bar{w} \;\Leftrightarrow\; \overline{Av} = \overline{Aw}.$$
En déduire que l'on définit de manière unique une bijection a de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même par
$$\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \quad a(x) = \overline{Av},$$
où v est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $\bar{v} = x$. On dira que a est l'application projective associée à la matrice A. Quelles sont les autres matrices A' qui définissent la même application associée a ?

2. Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n, et a et b les applications projectives associées. Montrer que $a \circ b$ est l'application projective associée à la matrice AB, et que a^{-1} est l'application projective associée à la matrice A^{-1}.

3. En déduire que, sauf cas dégénéré, la composée de deux homographies du plan est une homographie et que l'inverse d'une homographie est une homographie.

4. On considère une caméra "tête d'épingle" de centre optique O, et dont le plan image est muni d'un repère local orthonormé. Soit M un point de la scène observée par la caméra, et (x, y) les coordonnées de la projection du point M sur le plan image. On "dépointe" alors la caméra en la faisant tourner sur elle-même (par une rotation R de $\mathbb{R}^3$) tout en maintenant fixe son centre optique. Le point M se projette alors sur le plan image (dont le repère local a aussi tourné) en (x', y'). Montrer que la relation qui lie (x', y') à (x, y) est une homographie du plan.

Exercice 15 (application des homographies).

1. Rappeler l'expression d'une homographie en coordonnées homogènes.

2. Écrire une fonction [X,Y] = homographie(H,x,y), qui prend en entrée une matrice H (de taille 3×3) représentant une homographie en coordonnées homogènes, ainsi que deux matrices x et y de taille n, p, et renvoie deux matrices X et Y de taille n, p telles que pour tout couple d'indices (k, l), $(X(k, l), Y(k, l))$ est l'image par l'homographie représentée par H du point $(x(k, l), y(k, l))$.

3. On suppose donnés 4 points $(x(i), y(i))$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ et 4 points $(X(i), Y(i))$. Montrer que si l'on impose la condition H(3,3)=1, alors l'unique homographie qui envoie les points $(x(i), y(i))$ sur leurs homologues $(X(i), Y(i))$ peut être calculée en résolvant un système linéaire que l'on écrira explicitement.

4. Déduire de la question 3 une fonction H=estime_homographie(x,y,X,Y) qui prend en entrée 4 vecteurs x, y, X et Y de taille 4 et calcule l'homographie H qui envoie les points $(x(i), y(i))$ sur leurs homologues $(X(i), Y(i))$ (toujours avec la condition H(3,3)=1).

5. Tester la fonction estime_homographie en prenant des vecteurs x,y,X,Y aléatoires (coordonnées dans $[0, 1000]$ par exemple), et en vérifiant que l'homographie calculée envoie bien les points $(x(i), y(i))$ sur leurs homologues $(X(i), Y(i))$. Pouvez-vous expliquer le phénomène observé ? (*Indication: on pourra calculer le conditionnement de la matrice définissant le système linéaire résolu par* estime_homographie).

6. Écrire une version modifiée de la fonction estime_homographie, en appliquant aux coordonnées des vecteurs d'entrée un facteur multiplicatif qui les ramène toutes dans l'intervalle $[0, 1]$, puis en compensant ce facteur après inversion du système pour que la fonction retourne la bonne solution. Comparer les résultats du test avec ceux de la première version.

7. Utiliser la fonction interpolation_bilineaire(u,X,Y) de l'exercice 11 pour écrire une fonction w=applique_homographie(H,u,v) qui prend en entrée une homographie représentée par une matrice H (de taille 3×3), deux images u,v et renvoie dans w une image de même taille que v qui est la transformée de u par H.

8. Utiliser les fonctions estime_homographie et applique_homographie pour reconstruire une image vue de face (avec une verticale de même taille à peu près) de l'un des tableaux présents sur l'image tableaux.pgm fournie. On commencera bien sûr par relever les positions des 4 coins du tableau choisi dans l'image.
