Exercices 1 à 10 (séries de Fourier)

Exercice 1 (assimilation du cours). Répondre par **vrai** ou **faux** aux affirmations suivantes. Dans le cas d'une affirmation fausse, justifiez votre réponse par un contre exemple et/ou en modifiant l'énoncé pour le rendre correct.

1. Les espaces L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ sont des espaces vectoriels normés complets.
2. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $L^2(I) \subset L^1(I)$.
3. Un espace de Hibert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
4. Si une suite de fonctions (f_n) converge dans L^2 vers une fonction $f \in L^2$, alors $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x.
5. Si une suite de fonctions (f_n) converge dans L^∞ vers une fonction $f \in L^\infty$, alors $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x.
6. L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
7. L'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
8. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} f(x,y)\, dx\, dy < \infty$, alors $\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} f(x,y)\, dx\, dy = \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} f(x,y)\, dy\, dx$.
9. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $e_n(t) = e^{int}$ est une base de l'espace vectoriel $L^2_p(0, 2\pi)$.
10. Si deux fonctions de $L^2_p(0, 2\pi)$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.
11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et 2π-périodique, alors sa série de Fourier converge simplement.
12. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique, alors sa série de Fourier converge simplement.
13. La série de Fourier d'une fonction $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ converge simplement vers f presque partout.

Exercice 2 (sommes de séries). Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique qui coïncide avec $x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 (développements eulériens). Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et f_α la fonction 2π-périodique qui coïncide avec $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer la série de Fourier de f, et en déduire que

$$\frac{1}{\sin t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{t - n\pi}$$

pour des valeurs de t à préciser.

Exercice 4 (lissage de Mackworth-Mokhtarian). On considère une courbe fermée plane représentée par une fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, non constante et 2π-périodique. Un réel $\alpha \in]0, \pi[$ étant fixé, on définit par récurrence

$$f_{n+1}(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_n(t+s)\, ds.$$

Montrer que pour α assez petit, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda^n f_n$ tend vers une ellipse.

Indication: calculer la série de Fourier de f_n.

Exercice 5 (développement en série de Fourier des fonctions hölderiennes). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et α-hölderienne avec $\alpha > \frac{1}{2}$.

1) Calculer, pour $h > 0$ fixé, la série de Fourier de $x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$ et appliquer l'égalité de Parseval.

2) En minorant la somme obtenue par paquets dyadiques ($2^p \leqslant n < 2^{p+1}$) pour $h = \frac{\pi}{4} 2^{-p}$, monrer que

$$\sum_{n \neq 0} |n|^{\frac{1}{2}+\alpha} |c_n(f)|^2 \leqslant C \cdot 2^{-p(\alpha - \frac{1}{2})}$$

pour une certaine constante C.

3) En déduire que f est somme de sa série de Fourier.

Exercice 6 (régularité d'une fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier). Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} :\to \mathbb{C}$ 2π-périodique, on a pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$f \in C^k \;\Rightarrow\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2k} |c_n(f)|^2 < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{k-1} |c_n(f)| < \infty \;\Rightarrow\; f \in C^{k-1}.$$

Exercice 7 (une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier). Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs.

1) On suppose que $\sum a_n \sin(nt)$ est la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1_p$. Déterminer les coefficients de Fourier de la primitive de f qui s'annule en 0. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

2) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n \geqslant 2} \frac{\sin(nt)}{\ln n}$ est partout convergente, mais que ce n'est pas la série de Fourier d'une fonction de L^1_p.

Exercice 8 (inégalité de Wirtinger). 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue, C^1 par morceaux et de moyenne nulle sur une période. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt,$$

avec égalité si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{it} z_1 + e^{-it} z_2$$

pour un certain couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Indication : appliquer l'égalité de Parseval aux fonctions f et f'.

2) Démontrer de manière similaire l'inégalité isopérimétrique : si C est une courbe régulière simple, fermée, et C^1, de longueur L et d'aire intérieure S, alors $L \geqslant 4\pi S$, avec égalité si et seulement si C est un cercle.

Exercice 9 (formule sommatoire de Poisson). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction C^1 telle que $x \mapsto (1 + x^2)|f(x)|$ et $x \mapsto (1 + x^2)|f'(x)|$ soient bornées.

1) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ est C^1 et 2π-périodique.

2) Montrer que la fonction $\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} \, dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis, en utilisant le développement en série de Fourier de φ, que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

Exercice 10 (pavage d'un rectangle). On considère un rectangle R du plan $\mathbb{R}^2$ pavé par des rectangles $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant:

i) les cotés de chaque R_i sont parallèles aux axes;

ii) chaque R_i a un côté dont la longueur est un nombre entier.

Montrer que R a un côté dont la longueur est un nombre entier.

Indication: calculer $\displaystyle\iint_{R_i} e^{2i\pi(x+y)} \, dx \, dy$.
