Exercices 11 à 26 (Transformée de Fourier I)

Exercice 11 (assimilation du cours). Répondre par **vrai** ou **faux** aux affirmations suivantes. Dans le cas d'une affirmation fausse, justifiez votre réponse par un contre exemple et/ou en modifiant l'énoncé pour le rendre correct.

1. Si $f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est bornée.
2. Si $f \in L^1$, alors $\hat{f} \in L^1$.
3. Si $f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est continue à support compact.
4. Si $f_n \to f$ dans L^1, alors $\hat{f}_n$ converge uniformément vers $\hat{f}$.
5. Si $f, g \in L^1$, alors $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.
6. L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de L^1 dans L^∞.
7. L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de L^1 dans $(C_0^0, \|\cdot\|_\infty)$.
8. Si $f \in L^1$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \hat{f}(0)$.
9. Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} = 2\pi f(0)$.
10. Si $f(x) = e^{-x^2/2}$, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\hat{f} = \alpha f$.
11. Si f est de classe C^p et $f, f', \dots f^{(p)}$ sont dans L^1, alors $\widehat{f^{(p)}}(\xi) = (-i\xi)^p \hat{f}(\xi)$.
12. Si $f \in L^1$ et $g(x) = f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$ fixé), alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda \xi)$.
13. Si $f \in L^1$ et f est de classe C^∞, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\hat{f}^{(p)} = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^p f(x))$.
14. Si $f \in L^1$ et $\hat{f}$ est à support compact, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi.$$
15. Si $f, g \in L^1$, alors $f \star g \in L^2$.
16. Si $f, g \in L^1$, alors $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
17. Si $f_0 \in L^1$ et $f_n = f_{n-1} \star f_0$ pour tout $n \in N$, alors $\hat{f}_n = (\hat{f}_0)^n$.

Exercice 12 (transformée de Fourier et parité). Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes.

a) Calculer en fonction de $\hat{f}$ la transformée de Fourier des fonctions $g : x \mapsto f(-x)$ et $h : x \mapsto f^*(x)$, où $f^*(x)$ désigne le complexe conjugué de $f(x)$.

b) Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}$ aussi.

c) Montrer que si f est impaire, alors $\hat{f}$ aussi.

d) Montrer que si f est à valeurs réelles, alors $\hat{f}(-\xi) = \hat{f}^*(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que si f est à valeurs réelles et paire, alors $\hat{f}$ aussi.

f) Montrer que si f est à valeurs réelles et impaire, alors $i\hat{f}$ aussi.

Exercice 13 (changement de variable affine). Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, et deux réels α et β. Exprimer en fonction de $\hat{f}$ la transformée de Fourier de la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$.

Exercice 14 (transformées classiques). Calculer, pour tout $\lambda > 0$, la transformée de Fourier des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

a) $x \mapsto e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$; b) $x \mapsto e^{\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)$; c) $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$;
d) $x \mapsto e^{-\lambda|x|}\mathrm{sgn}(x)$; e) $x \mapsto |x|\, e^{-\lambda|x|}$.

Exercice 15 (transformée de Fourier et convolution). Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On définit la convolée de f et de g par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy.$$

a) À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

b) Montrer que $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Exercice 16 (une algèbre de fonctions exponentielles). Pour $\lambda > 0$, on pose

$$h_\lambda(x) = e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

a) En utilisant la définition de la convolution, calculer directement $h_\lambda \star h_\mu$.

b) En utilisant la transformée de Fourier de h_λ calculée dans l'exercice 12, et l'exercice 13, calculer indirectement $h_\lambda \star h_\mu$ (on pourra utiliser une décomposition en éléments simples de $\widehat{h_\lambda} \cdot \widehat{h_\mu}$).

Exercice 17 (loi de Cauchy). Pour tout $a > 0$ on définit la fonction $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-a|x|}$. En déduire la transformée de Fourier de g_a.
2. Calculer $\widehat{g_a} \cdot \widehat{g_b}$, puis en déduire $g_a \star g_b$.
3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, retrouver directement la valeur de $g_a \star g_b(0)$ sans utiliser la transformation de Fourier (on supposera $a \neq b$ pour simplifier).
4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, distribuées selon des lois de Cauchy centrées (i.e. de densité g_a/Z_a et g_b/Z_b, où Z_a et Z_b sont des constantes de normalisation). Montrer que $X+Y$ est aussi distribuée selon une loi de Cauchy centrée dont on précisera le paramètre. En déduire que la loi des grands nombres ne s'applique pas pour des variables aléatoires distribuées selon une loi de Cauchy.

Exercice 18 (exemples de transformées de Fourier). On considère deux réels α et λ, avec $\lambda > 0$.

1. En déduire la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\lambda|x-\alpha|}$.
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \frac{e^{-i\alpha x}}{\lambda^2 + x^2}.$$
3. Soit F une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, décomposée sous la forme $F = F_1 + iF_2$ avec F_1, F_2 à valeurs réelles. Montrer que F_1 et F_2 sont dans $L^1(\mathbb{R})$, puis que
$$\hat{F}_1 = \frac{\hat{F} + \hat{F}^*}{2} \qquad \text{et} \qquad \hat{F}_2 = \frac{\hat{F} - \hat{F}^*}{2i}.$$
4. En déduire les transformées de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$x \mapsto \frac{\cos(\alpha x)}{\lambda^2 + x^2} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\lambda^2 + x^2},$$
et représenter graphiquement la fonction obtenue dans chaque cas.

Exercice 19 (convolution des fonctions de Gauss). On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pout tout réel $t > 0$, on considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}$ par $g_t(x) = g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

1. Rappeler la relation entre g et $\hat{g}$.
2. Déterminer $\hat{g}_t$ pour tout $t > 0$. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t$.
3. On considère deux réels strictement positifs s et t. Calculer la transformée de Fourier de $g_s \star g_t$. En déduire que $g_s \star g_t = K(s,t) \cdot g_{s+t}$, où $K(s,t)$ est une fonction de s et t que l'on explicitera.
4. Montrer directement que $g_s \star g_t = K(s,t) \cdot g_{s+t}$ en utilisant la définition de la convolution.
   Indication: on pourra montrer dans un premier temps l'identité
   $$g_s(x) \cdot g_t(y-x) = g_{\frac{st}{s+t}}\left(x - \frac{sy}{s+t}\right) \cdot g_{s+t}(y).$$

Exercice 20 (fonction de Gabor).

Dans cet exercice, on se propose de calculer, pour tout $\alpha > 0$, la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{e^{-\alpha x^2} \sin x}{x}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $g = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ (fonction indicatrice de $[-1,1]$).
2. Rappeler la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ définie sur $\mathbb{R}$. En déduire, pour tout $\beta > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $G_\beta : x \mapsto e^{-\beta x^2}$.
3. Rappeler le lien entre convolution et transformée de Fourier (énoncer un théorème).
4. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $h = g \star G_\beta$.
5. En déduire une expression de la transformée de Fourier de f, que l'on exprimera à l'aide de la fonction de répartition de la loi de Gauss
   $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Exercice 21 (unité pour la convolution). En utilisant la transformation de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad f \star u = f.$$

Exercice 22 (compacité simultanée des supports). Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à support compact telle que sa transformée de Fourier soit à support compact.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que $\hat{f}$ peut être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. En déduire que $f = 0$.

Exercice 23 (utilisation de la convolution).

a) Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{1}_{[-a,a]}$.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ (utiliser le résultat de l'exercice 15-b).

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Exercice 24 (transformée en cosinus).
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

1. Montrer que la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(x\xi)\,dx$$
est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application qui à f fait correspondre $\tilde{f}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}_+)$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
3. Montrer que
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}\hat{g}(\xi),$$
où g est un prolongement de f à $\mathbb{R}$ que l'on précisera, et $\hat{g}$ désigne la transformée de Fourier de g.
4. En déduire que $\tilde{f}$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.
5. Montrer que si $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{f}(\xi)\cos(x\xi)\,d\xi.$$
6. Calculer $\tilde{f}$ pour $f(x) = e^{-x}$, puis pour $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
7. Que devient le prolongement g de la question 3 si l'on remplace le cosinus par un sinus dans la définition de $\tilde{f}$?

Exercice 25 (une fonction singulière).

Dans ce exercice, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer par l'absurde que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.
3. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2(1+i\xi)}\, du.$$

4. On note D l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive, c'est-à-dire $D = \{x + iy,\ x > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'on peut définir une fonction $H : D \to \mathbb{C}$ par

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zu^2}\, du$$

est que H est holomorphe sur D.

5. On considère la fonction racine carrée complexe sur D, c'est-à-dire la fonction holomorphe $R : D \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $z = re^{i\theta} \in D$ (avec $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$), par

$$R(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}.$$

Montrer que H coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction holomorphe $I : D \to \mathbb{C}$ définie par $I(z) = R(\pi/z)$.

6. En déduire que $\hat{f}(\xi) = R\left(\dfrac{\pi}{1+i\xi}\right)$ pour tout réel ξ.
7. En déduire que la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}}$ est

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{1+\xi^2}} + \frac{2\pi}{1+\xi^2}}.$$

Exercice 26 (transformée de Fourier de gaussiennes multidimensionnelles).

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $\lambda > 0$ par

$$f(x, y) = e^{-\lambda(x^2+y^2)}.$$

b) Soit A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(X) = e^{-{}^tAXA}.$$
