Exercices 27 à 35 (Transformée de Fourier II)

Exercice 27 (transformée de Fourier des fractions rationnelles).

1. Montrer que si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^2$, alors $\mathcal{F}\hat{f} = 2\pi\tilde{f}$, où $\tilde{f}$ est définie (presque partout) par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = f(-x).$$
2. Rappeler la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
3. En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :
$x \mapsto \dfrac{1}{a+ix}$ $(a > 0)$; $x \mapsto \dfrac{1}{-a+ix}$ $(a > 0)$; $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$;
$x \mapsto \dfrac{ax+b}{(x-x_0)^2+c^2}$ $(c > 0)$.

Exercice 28. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^4+4}.$$

1. Écrire la décomposition de f en éléments simples (on pourra remarquer que
$$x^4 + 4 = (2 + ax + x^2)(2 - ax + x^2)$$
pour un réel a à préciser).
2. En déduire l'expression explicite de $\hat{f}$ (utiliser les résultats de l'exercice 27).

Exercice 29 (fonction artangente). On considère 2 réels a et b tels que $0 < a < b$, et on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan(bx) - \arctan(ax).$$

1. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \qquad |f(x)| \leqslant (b-a)h_x'(a),$$
où h_x est la fonction définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_x(t) = \arctan(tx).$$
2. En déduire que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$, on a, pour presque tout réel ξ,
$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \int_{A_{\varphi(n)}} g(x) e^{-ix\xi}\, dx,$$
où $A_n = \left[-n, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, n\right]$ et φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
4. Montrer que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ et, à l'aide de la question précédente, que
$$\forall \xi \neq 0, \qquad \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{i\xi} \widehat{f'}(\xi).$$
5. En déduire que
$$\forall \xi \neq 0, \qquad \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{\pi i}{\xi} \left(e^{-|\xi|/a} - e^{-|\xi|/b} \right).$$
6. A-t-on $f \in L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 30 (convolutions involutives).

1. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.
2. Montrer que si f et g sont éléments de $L^2(\mathbb{R})$, alors $f \star g$ est définie partout, et est élément de $L^\infty(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si f et g sont éléments de $L^2(\mathbb{R})$, alors $f \cdot g \in L^1$ et
$$\widehat{f \cdot g} = \mathcal{F}f \star \mathcal{F}g$$
(indication: utiliser la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2).
4. Résoudre dans $L^2(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.

Exercice 31 (une transformée de Fourier "exotique"). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\hat{f} \notin L^2(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction h continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f - h \in L^2(\mathbb{R})$.
5. En déduire que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver deux fonctions g_1 et g_2 avec $g_1 \in L^1$ et $g_2 \in L^2$ telles que $\hat{f} = g_1 + g_2$ presque partout.

Exercice 32 (théorème de l'échantillonnage). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathcal{S}$ (espace de Schwartz réel) vérifiant

$$\forall\, \xi \notin]-\pi, \pi[, \qquad \hat{f}(\xi) = 0.$$

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, qui coïncide avec $\hat{f}$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x + 2k\pi),$$
et en déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. On note
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$
le développement en série de Fourier de F. Montrer que cette série converge vers F et préciser le type de convergence.

3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

4. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_n\, e^{i(x+n)\xi}\, d\xi \right).$$

5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n = f(-n).$$

6. Déduire des deux questions précédentes que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\, \mathrm{sinc}\Big(\pi(x-n)\Big),$$
où sinc est le prolongement continu sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (\sin x)/x$.

Exercice 33 (image de L^1 par la transformation de Fourier). On note E l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformation de Fourier, c'est-à-dire

$$E = \left\{ \hat{f};\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \in L^1 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S} \subset E$, où $\mathcal{S}$ est l'espace de Schwartz.
2. En déduire que E est dense dans C_0^0 (espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$, muni de la norme infinie).
3. Soit f une fonction impaire de $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\forall a > 0,\ \forall b > 0, \qquad \int_a^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi = -2i \int_0^\infty f(t) \left(\int_{at}^{bt} \frac{\sin u}{u}\, du \right) dt.$$
4. En déduire que
$$\int_0^\infty \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi = -i\pi \int_0^\infty f(t)\, dt,$$
l'intégrale de gauche étant considérée au sens de Riemann généralisé. On rappelle que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}.$$
5. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, nulle en 0, vérifiant
$$\forall x > 0, \qquad g(x) = \frac{1}{1 + |\ln x|}.$$
Montrer que $g \in C_0^0$, puis que $g \notin E$.

Exercice 34 (convolution mixte). Dans cet exercice, on considère deux fonctions f et g, avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\hat{f} \cdot \mathcal{F}(g) \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f \star g(x)| \leqslant \sqrt{|f| \star g^2(x)} \cdot \sqrt{\|f\|_1}.$$
Indication: on pourra utiliser l'égalité $|f(t)g(x-t)| = \sqrt{|f(t)| \cdot g(x-t)^2} \cdot \sqrt{|f(t)|}$.
3. En déduire que $f \star g$ est bien définie et
$$\|f \star g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_2.$$
4. En utilisant la densité de $\mathcal{S}$, montrer que
$$\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f} \cdot \mathcal{F}(g).$$

Exercice 35. Dans cet exercice, on considère les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = e^{-x^2/2}, \quad g_2(x) = (x^2-1)\, e^{-x^2/2}.$$

1. Rappeler l'expression de $\hat{g}_1$.
2. Calculer g_1'', puis en déduire l'expression de $\hat{g}_2$.
3. Trouver (sous une forme explicite) une fonction $h_1 \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $h_1 \star h_1 = g_1$.
4. Montrer que les seules fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $f \star f = g_1$ sont $f = h_1$ et $f = -h_1$ (h_1 étant la fonction trouvée à la question précédente).
5. Trouver (sous une forme explicite) une fonction $h_2 \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $h_2 \star h_2 = g_2$.
6. Montrer qu'il existe une fonction $h_3 \in L^2(\mathbb{R})$, distincte de h_2 et de $-h_2$, telle que $\hat{h}_3 \in C_0^0$ et $h_3 \star h_3 = g_2$. On donnera l'expression de $h_3(x)$ sous forme d'une intégrale.
7. On considère, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction

   $$S_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}$$

   (prolongée sur $\mathbb{R}$ tout entier par continuité), et l'on note, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$,

   $$f_\alpha = f - 2f \star S_\alpha.$$

   Calculer $\widehat{S_\alpha}$, et en déduire que $\hat{f} \cdot \widehat{S_\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$.
8. Montrer que si deux fonctions $F, G \in L^2(\mathbb{R})$ vérifient $\hat{F} \cdot \hat{G} \in L^2(\mathbb{R})$, alors $F \star G \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{F \star G} = \hat{F} \cdot \hat{G}$ (on pourra faire une preuve par densité, en précisant bien les résultats du cours utilisés dans la démonstration).
9. Déduire de ce qui précède que $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$, puis l'expression explicite de la transformée de Fourier de f_α en fonction de celle de f.
10. En déduire que l'équation $h \star h = g_2$ est vérifiée pour une infinité de fonctions $h \in L^2(\mathbb{R})$.