Exercices 1 à 10 (convexité et différentielle au sens de Gâteaux)

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé.

a) Montrer que si $g : E \to \mathbb{R}$ est convexe, alors

$$C_g = \{x \in E,\ g(x) \leqslant 0\}$$

est convexe.

b) Montrer que si $h : E \to \mathbb{R}$ est affine, alors

$$C_h = \{x \in E,\ h(x) = 0\}$$

est convexe. Exhiber un exemple pour $E = \mathbb{R}^2$ de fonction h convexe telle que C_h n'est pas convexe.

c) Montrer que toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

d) En déduire que si les fonctions $g_j : E \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ sont convexes et les fonctions $h_i : E \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont affines, alors l'ensemble des contraintes

$$C = \Big\{x \in E,\ \forall i \in \{1, \dots, p\},\ h_i(x) = 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\},\ g_j(x) \leqslant 0\Big\}$$

est convexe.

Exercice 2. Reconnaître "géométriquement" les ensembles décrits par les contraintes suivantes:

a) $E = \mathbb{R}^2$, $p = 1$, $q = 1$, $h_1(x, y) = y$, $g_1(x, y) = x$

b) $E = \mathbb{R}^2$, $p = 0$, $q = 2$, $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $g_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

c) $E = \mathbb{R}^3$, $p = 1$, $q = 1$, $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g_1(x, y, z) = -z$

d) $E = \mathbb{R}^n$, $p = 1$, $q = n$, $h_1(\mathbf{x}) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\forall j,\ g_j(\mathbf{x}) = -x_j$, où $\mathbf{x} = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$

Exercice 3.

1) Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, on note

$$C_0(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad C_-(f) = \{x \in E,\ f(x) \leqslant 0\}.$$

a) Exprimer $C_0(f^2 + g^2)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$.

b) Exprimer $C_0(f \cdot g)$ en fonction de $C_0(f)$ et $C_0(g)$.

c) Exprimer $C_-(\max(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$.

d) Exprimer $C_-(\min(f, g))$ en fonction de $C_-(f)$ et $C_-(g)$.

e) On définit f^+ par $f^+(x) = \max(0, f(x))$. Exprimer $C_-(f)$ en fonction de $C_0(f^+)$.

2) On considère l'ensemble C défini par

$$C = \Big\{ x \in E,\ \forall i \in \{1, \dots, p\},\ h_i(x) = 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\},\ g_j(x) \leqslant 0 \Big\},$$

où les h_i et les g_j sont des fonctions à valeurs réelles définies sur E. Montrer que l'on peut construire à partir de ces fonctions une fonction $h : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$C = \Big\{ x \in E,\ h(x) = 0 \Big\}.$$

Quel est le défaut majeur d'une telle fonction h ?

Exercice 4. Pour chacune des formes géométriques suivantes, proposer un exemple d'ensemble C décrit par des contraintes-égalités (h_i) et des contraintes-inégalités (g_j):

a) un segment en dimension 2
b) un triangle plein en dimension 2
c) un triangle (bord uniquement) en dimension 2
d) un demi-cercle en dimension 2
e) un disque en dimension 3
f) une demi-boule en dimension 3
g) une "boîte de conserve" pleine (cylindre tronqué) à fond circulaire en dimension 3
h) l'ensemble des suites finies réelles croissantes à n éléments

---

Exercice 5. Pour chacun des problèmes de minimisation sous contrainte ci-dessous, dire s'il y a existence de solutions et s'il y a unicité. Expliquer dans chaque cas quel théorème du cours s'applique ou pourquoi il ne peut s'appliquer.

a) $E = \mathbb{R}$, $J(x) = e^{-x}$, $C = \mathbb{R}^+$
b) $E = \mathbb{R}$, $J(x) = x^2$, $p = 0$, $q = 1$, $g_1(x) = -|x| + 1$
c) $E = \mathbb{R}^2$, $J(x, y) = \sin(xy)$, $p = 1$, $q = 1$, $h_1(x, y) = x + y - 3$, $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
d) $E = \mathbb{R}^3$, $J(x, y, z) = x^2 + 2y^2$, $p = 1$, $q = 1$, $h_1(x, y, z) = z$, $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^n$, et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Montrer que si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad J(y) \geqslant J(x) + < \nabla J(x), y - x >,$$

alors J est convexe (réciproque du résultat démontré en cours).

Indication: introduire le point $z = x + t(y - x)$ pour $t \in [0, 1]$, et appliquer l'inégalité aux couples (z, x) et (z, y).

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^n$, et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable.

a) Montrer que si J est convexe, alors ∇J est monotone, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y > \geqslant 0.$$

b) Réciproquement, montrer que si ∇J est monotone, alors J est convexe.

Indication: étudier les variations de la fonction

$$\varphi(t) = (1-t)J(x) + tJ(y) - J((1-t)x + ty).$$

c) Montrer que J est strictement convexe si et seulement si ∇J est strictement monotone.

Exercice 8. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, et la fonction J définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = < Ax, x > + < b, x > .$$

a) Calculer la différentielle de J, puis sa différentielle seconde.
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que J soit convexe.
c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que J soit strictement convexe.
d) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que J soit elliptique.
e) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que J soit M-lipschitzienne ($M > 0$ fixé).
f) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et b pour que ∇J soit M-lipschitzienne ($M > 0$ fixé).

Exercice 9. Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ à support compact et de classe C^2, muni du produit scalaire

$$< u, v >= \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)v(x,y)\, dxdy.$$

Calculer la différentielle au sens de Gâteaux de

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy.$$

Indication: utiliser une intégration par parties.

Exercice 10. Un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_\varepsilon(x) = \sum_{i=2}^{n-1} N_\varepsilon(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad \text{où} \quad N_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon + t^2}.$$

a) Calculer la différentielle de J_ε de trois façons différentes:

- en calculant $\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial x_i}$ pour tout i;
- en calculant la différentielle au sens de Gâteaux de J_ε
- en calculant seulement la forme différentielle dJ_ε.

b) Écrire une fonction scilab `DJ = gradientJ(x,eps)` qui prend en argument un vecteur colonne `x`, un réel strictement positif `eps`, et renvoie dans DJ le gradient de J_ε en `x` sous forme de vecteur colonne.
