Exercices 11 à 15 (projection sur un convexe)

Exercice 11. Soit C un convexe fermé non vide de $E = \mathbb{R}^n$, et $y \in E$.

a) Montrer que $\bar{x} = \pi_C(y)$ (projection de y sur C) vérifie

$$\forall x \in C, \quad < x - \bar{x}, x - y > \geqslant 0. \tag{1}$$

b) Montrer réciproquement que si un point $\bar{x}$ de C vérifie (1), alors nécessairement $\bar{x} = \pi_C(y)$.

Indication: introduire le point $z = \bar{x} + t(x - \bar{x})$ *pour* $t \in]0, 1]$.

Exercice 12. Soit C un convexe fermé non vide de $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle.

a) Montrer que pour tous x et y de E,

$$0 \leqslant \|y-\pi_C(y)\|^2-\|x-\pi_C(x)\|^2-2 < x-\pi_C(x), y-x > \leqslant \|y-x\|^2-\|\pi_C(y)-\pi_C(x)\|^2.$$

b) En déduire que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x - \pi_C(x)\|^2$ est différentiable en tout point, et exprimer sa différentielle.

c) Pour $r \geqslant 0$, on définit le r-dilaté de C par $C_r = \{x \in E,\ f(x) \leqslant r^2\}$. Montrer que f est convexe, puis en déduire que pour tout $r > 0$, C_r est convexe.

Exercice 13. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}.$$

a) Quel est la forme géométrique de C ? Montrer que C est convexe.

b) Expliciter la projection sur C, i.e. l'application π_C qui a un vecteur y de $\mathbb{R}^3$ associe l'unique vecteur x de C tel que $\|y - x\|$ soit minimal.

c) Écrire une fonction Scilab `x=projection(y)`, qui prend en entrée un vecteur colonne `y` de $\mathbb{R}^3$, et renvoie dans le vecteur `x` (de même taille que `y`) la projection de `y` sur C.

Exercice 14 (projection sur un triangle).

a) Soit $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Décrire un algorithme permettant de calculer la projection X d'un point $Y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sur la droite (AB), sous la forme $X = (1-\lambda)A + \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire la fonction scilab `lambda=projection_droite(y,a,b)` correspondante (`y,a,b` étant trois vecteurs-colonne de dimension 2).

b) Décrire un algorithme permettant de calculer la projection (notée $\pi_{[AB]}(Y)$) d'un point Y de $\mathbb{R}^2$ sur le segment $[AB]$ à partir de sa projection $Z = (1-\lambda)A + \lambda B$ sur (AB). Écrire la fonction scilab `x=projection_segment(y,a,b)` correspondante (cette fonction pourra faire appel à la fonction `projection_droite`).

c) On considère un troisième point $C = (c_1, c_2)$ de $\mathbb{R}^2$, distinct de A et B. Pour tout point Y de $\mathbb{R}^2$, on note $\sigma_{AB}(Y)$ l'aire algébrique du triangle ABY, définie par

$$\sigma_{AB}(Y) = \frac{1}{2}\det(A-Y, B-Y),$$

où det est le déterminant usuel d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que Y est à l'intérieur du triangle ABC si et seulement si les trois nombres $\sigma_{AB}(Y)$, $\sigma_{BC}(Y)$ et $\sigma_{CA}(Y)$ sont de même signe (les fonctions σ_{BC} et σ_{CA} étant définies comme σ_{AB}). Écrire une fonction scilab `t=interieur_triangle(y,a,b,c)` qui renvoie un booléen `t` égal à vrai (%T) si `y` est intérieur au triangle `abc`, faux (%F) sinon.

d) Montrer que si $X \in \mathbb{R}^2$ est la projection d'un point Y de $\mathbb{R}^2$ sur le triangle (plein) ABC, alors

$$X \in \{Y, \pi_{[AB]}(Y), \pi_{[BC]}(Y), \pi_{[AC]}(Y)\}.$$

En déduire un algorithme pour calculer X, puis écrire la fonction scilab correspondante `x=projection_triangle(y,a,b,c)` (cette fonction pourra faire appel aux fonctions `projection_segment` et `interieur_triangle` précédemment écrites).

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. On définit

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ {}^t\!xAx \leqslant 1\}.$$

a) Montrer que C est convexe. Si A est une homothétie (i.e. $A = \lambda I$), que représente géométriquement l'ensemble C ?

b) Montrer que pour une base orthonormée $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ convenable, il existe des coefficients strictement positifs $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Que représente géométriquement l'ensemble C ?

c) Montrer que pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de $\mathbb{R}^n \setminus C$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (noté par la suite $\lambda(x)$) tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{x_i^2}{(1+\lambda\alpha_i)^2} = 1.$$

d) Montrer que la projection de x sur C est définie par

$$\pi_C(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+\lambda(x)\alpha_i} e_i.$$

e) Écrire en scilab une fonction `lambda=lambda_proj(alpha,x)`, qui prend en entrée deux vecteurs colonne `alpha`$= (\alpha_i)$ et `x`$= (x_i)$ tels que $\sum_i \alpha_i x_i^2 > 1$, et renvoie dans `lambda` une approximation du $\lambda(x)$ associé. Cette approximation sera calculée par dichotomie, avec un nombre d'itération assurant une précision relative de 10^{-10}.

f) Écrire en scilab une fonction `x=projection(A,y)` qui prend en entrée une matrice `A` de taille $n \times n$ symétrique définie positive et un vecteur colonne `y` de taille n, et renvoie dans `x` la projection de `y` sur C (on pourra utiliser la fonction scilab `bdiag`).
