Exercices 16 à 18 (méthode du gradient projeté)

Exercice 16. Soit A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème (P) suivant :

(P) : *Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise*

$$J(x) = \|Ax - b\|^2$$

sous les contraintes $x_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

1. Montrer que J est Gâteaux-différentiable et calculer ∇J.
2. Montrer que J est elliptique et que ∇J est lipschitzienne (préciser les constantes associées en fonction de A et b).
3. Expliciter l'algorithme du gradient projeté associé à (P). Pour quelles valeurs du pas (δ) est-on assuré de la convergence ?
4. Écrire une fonction scilab `x=minimise(A,b,delta,r)` qui prend en entrée une matrice carrée `A` de taille $n \times n$, un vecteur colonne $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$, un réel `delta` strictement positif et un entier `r`, et qui retourne le résultat `x` de l'algorithme décrit à la question précédente appliqué avec `r` itérations et un pas `delta`.
5. Utiliser la fonction `minimise`, avec des choix appropriés de `delta` et `r`, pour trouver la solution de (P) quand
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
(donner la liste complète des commandes scilab utilisées).
6. Vérifier à la main la solution obtenue à la question précédente en appliquant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 17 (déquantification d'un signal). Soit $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $g_1 \leqslant g_2$. On considère le problème (P) suivant :

$$\text{(P)} : \textit{Trouver } f : I \to \mathbb{R} \textit{ qui minimise } J(f) = \sum_{i=1}^{n-2} \Big(f(i+2) - 2f(i+1) + f(i) \Big)^2$$

sous la contrainte $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$.

1. Montrer que (P) admet au moins une solution. Donner un exemple de fonctions g_1 et g_2 pour lesquelles il n'y a pas unicité.

2. On considère maintenant le problème modifié

   $$(\tilde{P}) : \textit{Minimiser } \tilde{J}(f) \textit{ sous la contrainte } g_1 \leqslant f \leqslant g_2,$$

   où $\tilde{J}(f) = J(f) + \varepsilon(f(1)^2 + f(n)^2)$ et $\varepsilon > 0$ est fixé. Montrer que $\tilde{J}$ est une forme quadratique définie positive (f étant considérée comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$), et en déduire que $(\tilde{P})$ admet une unique solution. En déduire que si $g_1(1) = g_2(1)$ et $g_1(n) = g_2(n)$, alors (P) admet aussi une unique solution. Dans toute la suite, on suppose désormais que $g_1(1) = g_2(1)$ et $g_1(n) = g_2(n)$.

3. Expliciter l'algorithme du gradient projeté associé à $(\tilde{P})$, et montrer que le résultat ne dépend pas de ε.

4. Écrire une fonction Scilab `[f,m]=minimise(g1,g2,delta,r)` qui prend en entrée 2 vecteurs colonne `g1`, `g2`, un réel `delta` strictement positif et un entier `r`, et qui retourne dans `f` et `m` la fonction f et la valeur de $J(f)$ associée, obtenus par application de l'algorithme décrit à la question précédente appliqué avec `r` itérations et un pas `delta`.

5. Trouver numériquement la solution f de (P) pour $n = 19$, $g_1(i) = 9 - |i - 10|$, $g_2(i) = 18 - 2 \cdot |i - 10|$, et visualiser le résultat par

   ```
   plot2d(1:19,[g1,g2,f])
   ```

   On testera successivement plusieurs valeurs du pas `delta`, avec un nombre suffisant d'itérations, jusqu'à atteindre un résultat stable. Donner les valeurs de `delta` et `r` retenues (et le cheminement suivi), ainsi que la valeur de $J(f)$ obtenue. Que vaut $f(10)$? Pouvait-on intuitivement prévoir cette valeur ?

6. Charger le fichier `temperature.dat` au moyen de la commande Scilab

   ```
   exec("temperature.dat");
   ```

   Cette commande définit un tableau `T` à n éléments qui représente la fonction $T : I \to \mathbb{R}$. Calculer numériquement l'unique fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui minimise $J(f)$ sous la contrainte

   $$|f - T| \leqslant q,$$

   où $q : I \to \mathbb{R}$ est définie par $q(1) = 0$, $q(n) = 0$ et $q(i) = \frac{1}{4}$ si $2 \leqslant i \leqslant n - 1$. Expliciter le lien avec ce qui précède et donner la valeur de $J(f)$ obtenue (préciser les commandes utilisées, notamment les valeurs de `r` et `delta`). Visualiser le résultat.

7. Commenter l'intérêt du problème de minimisation sous contrainte résolu à la question 6.

Exercice 18. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 \leqslant 1 \text{ et } x_2^2 \leqslant 1\}.$$

1. a) Quel est la forme géométrique de C ? Montrer que C est convexe.

   b) Expliciter la projection sur C, i.e. l'application π_C qui a un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ associe l'unique vecteur z de C tel que $\|x - z\|$ soit minimal.

   c) Écrire une fonction Scilab `z=projection(x)`, qui prend en entrée un vecteur colonne `x` de $\mathbb{R}^3$, et renvoie dans le vecteur `z` (de même taille que `x`) la projection de `x` sur C.

2. Soit A une matrice réelle 3×3 inversible, et b un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On considère la fonction $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $J(x) = \|Ax - b\|^2$, et le problème (P): *Minimiser $J(x)$ sous la contrainte $x \in C$.*

   a) Montrer que (P) admet une unique solution.

   b) Expliciter l'algorithme du gradient projeté associé à (P). Pour quelles valeurs du pas est-on assuré de la convergence ?

   c) Écrire une fonction Scilab `x=minimise(A,b,delta,r)` qui prend en entrée une matrice `A` de taille 3×3, un vecteur `b` de $\mathbb{R}^3$, un réel strictement positif `delta` et un entier `r`, et renvoie dans `x` la solution approchée de (P) obtenue après `r` itérations de l'algorithme du gradient projeté de pas `delta` (on prendra le vecteur nul comme initialisation de la solution). Cette fonction `minimise` pourra faire appel à la fonction `projection` définie dans la question 1.c.

   d) À l'aide de la fonction `minimise` écrite à la question précédente, calculer numériquement le minimum de J sur C quand

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (on précisera bien les valeurs choisies pour `delta` et `r`, et la stratégie adoptée pour choisir ces valeurs).

   e) Trouver, dans le cas particulier de la question précédente, la valeur empirique à 10^{-4} près du pas critique δ_c au-delà duquel la convergence ne se produit plus.