Exercices 19 à 23 (conditions de Karush-Kuhn-Tucker)

Exercice 19. Minimiser la fonction

$$F(x,y) = x^2 - 14x + y^2 - 6y - 7$$

sur l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y \leqslant 2 \text{ et } x + 2y \leqslant 3\}.$$

Interpréter géométriquement le problème.

Exercice 20. On considère la fonction J définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad J(x,y) = x^2 + xy,$$

et l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble C. Quels sont les points réguliers pour les contraintes qui définissent C ?

b) Trouver le minimum de J sur C.

c) Trouver le maximum de J sur C.

d) Représenter graphiquement (à la main, puis sous Scilab à l'aide de la fonction `contour2d`) les lignes de niveau de J, et retrouver les résultats précédents géométriquement.

Exercice 21. Soient $n_1, n_2, \dots n_k$ des entiers strictement positifs. On définit, sur le simplexe

$$S_k = \left\{ (p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \in \mathbb{R}^k,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \text{ et } \forall i, p_i \geqslant 0 \right\},$$

la fonction

$$F(p_1, p_2, \dots p_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}.$$

a) Maximiser F sur S_k.
b) Que se passe-t-il si certains des n_i sont nuls ?
c) Interpréter en termes statistiques le résultat de la question a).

Exercice 22 (régression linéaire avec contrainte). Soient $x = (x_i), y = (y_i)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). On suppose dans toute la suite que les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux distincts.

a) Décrire un algorithme permettant de trouver les réels a et b, avec $b \geqslant 0$, qui minimisent l'erreur quadratique

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2.$$

b) Écrire une fonction scilab `[a,b]=regression_bpos(x,y)` qui implémente cet algorithme.

c) Donner un exemple numérique quand $n = 3$ pour lequel la contrainte $b \geqslant 0$ est saturée (on donnera les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$ choisis, et les valeurs de a et b retournées par l'algorithme proposé à la question précédente).

Exercice 23 (projection sur un simplexe). Dans tout l'exercice, n est un entier au moins égal à 2 et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne usuelle. On considère le sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$C = \left\{ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

1. Quelle interprétation classique peut-on faire des éléments de C ?

2. Décrire C sous la forme usuelle d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ soumis à des contraintes (égalité(s) et inégalité(s)), avec $n+1$ contraintes au total.

3. Montrer que C est convexe.

4. Soit $\mathbf{y} = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in C$ vérifiant

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x}\in C} J(\mathbf{x}),$$

   où $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par $J(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$.

5. Montrer, à l'aide du théorème de Karush-Kuhn-Tucker, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots n\}, \quad \mu_i\, \bar{x}_i = 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}_i - y_i + \lambda - \mu_i = 0.$$

6. En déduire que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots n\}, \quad \bar{x}_i = \max(0, y_i - \lambda).$$

7. On suppose dans toute la suite que $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ (on peut toujours se ramener à ce cas par permutation des vecteurs de base). Montrer qu'il existe un unique entier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\lambda \in]y_{j-1}, y_j]$, avec la convention $y_0 = -\infty$.

8. On pose
$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \lambda_k = \frac{1}{n-k+1} \left(-1 + \sum_{i=k}^{n} y_i \right).$$
Montrer que $\lambda = \lambda_j$, où j est l'indice de la question précédente.

9. Montrer que la suite finie $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement décroissante.

10. En déduire qu'il existe un unique indice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_k \in]y_{k-1}, y_k]$, puis que $k = j$.

11. Déduire de tout ce qui précède un algorithme pour calculer $\bar{\mathbf{x}}$ à partir de $\mathbf{y}$.

12. Implémenter cet algorithme en scilab par une fonction `x = argminJ(y)` prenant en entrée un vecteur colonne `y` (on supposera que `y` vérifie les hypothèses de la question 7) et renvoyant la solution $\bar{\mathbf{x}}$ dans un vecteur colonne `x` de même taille que `y`.

13. Calculer à la main les λ_k, puis j et enfin $\bar{\mathbf{x}}$ pour $\mathbf{y} = {}^t(-0.05, 0.1, 0.2, 0.2, 0.6)$. Vérifier la solution obtenue à l'aide de la fonction scilab proposée à la question précédente.
