Exercices 24 à 27 (dualité et méthode d'Uzawa)

Exercice 24. Soit A une matrice réelle à n lignes et p colonnes, de rang égal à p. Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^p$. Pour $x \in \mathbb{R}^p$, on définit

$$J(x) = \|Ax - b\|^2,$$

et l'on considère le problème

(P) : *Minimiser* $J(x)$ *sous la contrainte* ${}^t c\, x \leqslant 0$.

1. Calculer ∇J.
2. Montrer que J est elliptique (on précisera la constante d'ellipticité α en fonction des valeurs singulières de A).
3. Donner l'expression du Lagrangien associé à (P).
4. Dans cette question uniquement, on considère le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Résoudre (P) explicitement en utilisant le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.
5. Écrire une fonction `x=minimise_KKT(A,b,c)` qui calcule exactement la solution `x` de (P) en utilisant le théorème de Karush-Kuhn-Tucker à partir d'une une matrice `A` de taille $n \times p$, d'un vecteur colonne `b` $\in \mathbb{R}^n$, et d'un vecteur colonne `c` $\in \mathbb{R}^p$.
6. Décrire explicitement (c'est-à-dire sans faire référence à un procédé de minimisation) l'algorithme d'Uzawa associé à (P). Pour quelles valeurs du pas ρ est-on assuré de la convergence ?
7. Écrire une fonction scilab `x=minimise_uzawa(A,b,c,rho,N)` qui prend en entrée une matrice `A` de taille $n \times p$, un vecteur colonne `b` $\in \mathbb{R}^n$, un vecteur colonne `c` $\in \mathbb{R}^p$, un réel `rho` strictement positif et un entier `N`, et qui retourne le résultat `x` de l'algorithme décrit à la question précédente appliqué avec `N` itérations et un pas `rho`.
8. Dans le cas où l'on impose non plus une mais 100 contraintes-inégalité, qui s'écrivent ${}^t c_j\, x \leqslant 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant 100$, doit-on utiliser plutôt la méthode KKT ou la méthode d'Uzawa ? Expliquer pourquoi et donner l'algorithme associé.

Exercice 25. Soit $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, et $C > 0$. On considère le problème (P) suivant :

(P) : *Trouver* $x \in \mathbb{R}^n$ *qui minimise* $\|x - y\|^2$ *sous les contraintes*

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad g_i'(x) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2), \text{ avec}$$

$$g_i(x) = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i - C \quad \text{et} \quad g_i'(x) = -x_{i+2} + 2x_{i+1} - x_i - C.$$

1. Expliquer pourquoi le problème (P) admet une unique solution.

2. Soit
$$L(x, \mu, \mu') = \|x - y\|^2 + \sum_{k=1}^{n-2} \Big(\mu_k g_k(x) + \mu_k' g_k'(x)\Big)$$
le Lagrangien associé à (P), défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{n-2} \times \mathbb{R}_+^{n-2}$. Calculer $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (on pourra éventuellement poser $\mu_{-1} = \mu_0 = \mu_{n-1} = \mu_n = 0$ et $\mu_{-1}' = \mu_0' = \mu_{n-1}' = \mu_n' = 0$ pour simplifier les calculs).

3. En déduire l'expression de $\bar{x} = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu, \mu')$ en fonction de μ et μ'.

4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2 \leqslant 16 \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

5. En déduire que l'application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n-4}$ définie par
$${}^t g(x) = \Big(g_1(x), g_2(x), \ldots g_{n-2}(x), g_1'(x), g_2'(x), \ldots g_{n-2}'(x)\Big),$$
est M-lipschitzienne avec $M = 4\sqrt{2}$.

6. Expliciter l'algorithme d'Uzawa associé à (P). Pour quelles valeurs du pas ρ est-on assuré de la convergence ?

Exercice 26. Soit $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, et $C > 0$. On considère le problème

(P) : *Trouver* $x \in \mathbb{R}^n$ *qui minimise* $\|x - y\|^2$ *sous les contraintes* $-C \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant C$ *(*$1 \leqslant i \leqslant n-1$*).*

1. Montrer que la fonctionnelle à minimiser est elliptique, et préciser la constante d'ellipticité (α).

2. Montrer que le problème (P) admet une unique solution.

3. Donner l'expression du Lagrangien associé à (P).

4. Expliciter l'algorithme d'Uzawa associé à (P). Pour quelles valeurs du pas ρ est-on assuré de la convergence ?

5. Écrire une fonction Scilab [x,e]=uzawa(y,C,rho,r) qui retourne l'estimation de la solution de (P) obtenue après r itérations de la méthode d'Uzawa (initialisée avec les variables duales nulles) de pas rho, ainsi que le vecteur $e = (\|x^k - y\|)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ (x^k étant l'approximation de la solution obtenue après k itérations).

6. Enregistrer le fichier signal.dat dans le répertoire courant puis exécuter les commandes scilab

   ```
   exec("signal.dat");
   y=z(:,2);
   ```

   Sur le vecteur y ainsi défini, tester la fonction uzawa de la question précédente avec $C = 0.05$ et $r = 1000$. Comparer la convergence (visualiser la suite e) pour différentes valeur de rho. Quelle est approximativement la valeur maximale de rho pour laquelle il y a convergence ?

7. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que le problème (P) est équivalent au problème

   (P') : *Trouver $z \in \mathbb{R}^n$ qui minimise $\|Az - y\|^2$ sous les contraintes $-C \leqslant z_i \leqslant C$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.*

8. Expliciter l'algorithme du gradient projeté associé à (P').

9. Implémenter cet algorithme et comparer ses performances (stabilité, temps de calcul) à celui d'Uzawa.

Exercice 27. Soit A une matrice réelle à n lignes et p colonnes, de rang égal à p, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^p$, on définit

$$J(x) = \|Ax - b\|^2,$$

et l'on considère le problème

(P) : *Trouver $x \in \mathbb{R}^p$ qui minimise $J(x)$ sous les contraintes*

$$x_i - x_{i+1} \leqslant 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p-1).$$

1. Calculer la différentielle de J.

2. Montrer que J est elliptique et calculer sa constante d'ellipticité.

3. Montrer que le problème (P) admet une unique solution.

4. Donner l'expression du lagrangien associé à (P).

5. Expliciter l'algorithme d'Uzawa associé à (P). Pour quelles valeurs du pas ρ est-on assuré de la convergence ?

6. Écrire une fonction Scilab x=uzawa(A,b,rho,r) qui retourne l'estimation de la solution de (P) obtenue après r itérations de la méthode d'Uzawa (initialisée avec les variables duales nulles) de pas rho.

7. On considère le cas numérique où A et b sont définis par les commandes scilab suivantes :

```
n=20
A=toeplitz([0.2,0.4,zeros(1,n-2)]');A(1,1)=0.6;A(n,n)=0.6;
x0=1-cos((1:n)'*%pi/n);
b=A*x0+grand(n,1,'nor',0,0.05);
```

   Calculer (sous scilab, en utilisant la commande spec) la constante d'ellipticité de J, puis la valeur maximale admissible pour le pas ρ (préciser, outre les valeurs obtenues, les commandes scilab utilisées).

8. Calculer, à l'aide de la fonction uzawa donnée en réponse à la question 6, la solution de (P) (ne pas écrire le résultat sur votre copie). On prendra rho=0.002 et une valeur de r (à préciser) suffisante pour garantir la convergence. Donner la valeur retournée par norm(x-x0), où x est le résultat obtenu à l'aide la fonction uzawa.

9. On pose $z_p = x_p$ et $z_i = x_i - x_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Montrer que le problème (P) est équivalent au problème

   (P') : *Trouver* $z \in \mathbb{R}^p$ *qui minimise* $\|Cz - b\|^2$ *sous les contraintes*

$$z_i \leqslant 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p-1).$$

   pour une certaine matrice C dont on donnera l'expression en fonction de A.

10. Expliciter l'algorithme du gradient projeté associé à (P').

11. Écrire une fonction Scilab z=gradientp(C,b,rho,r) qui retourne l'estimation de la solution de (P') obtenue après r itérations de la méthode du gradient projeté (initialisé avec $z = 0$) de pas rho.

12. Comparer la solution de (P) obtenue par cette méthode à celle de obtenue précédemment, à l'aide des commandes scilab suivantes :

```
B=toeplitz([1;zeros(n-1,1)],[1,-1,zeros(1,n-2)]);
C=A*inv(B);
z=gradientp(C,b,0.005,100000);
norm(inv(B)*z-x)
```

   Quelle méthode est la plus rapide (i.e. nécessite le moins d'itérations) ? Quelle méthode est la plus précise ?
