Exercice 31

L'objectif de cet exercice est de définir la réduction d'une image u en une image v de telle sorte que le zoom (pour une interpolation donnée) de v soit le plus proche possible de u. Pour simplifier, on se place en dimension 1 (signaux) et dans le cas d'une réduction de facteur 2.

On note E l'espace vectoriel des signaux $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ absolument sommables (i.e. tels que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| < \infty$), muni de la norme euclidienne

$$\|u\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n : E \to E$ l'opérateur de zoom de facteur 2 par interpolation spline d'ordre n, et $T_\infty : E \to E$ l'opérateur de zoom de facteur 2 par interpolation de Shannon. Enfin, pour un signal $u \in E$ on considère le problème

$$(P_n) : \text{trouver } v \in E \text{ qui minimise } \|T_n v - u\|.$$

1. Montrer que pour tout $u \in E$, le problème (P_0) admet une unique solution (notée v_0), et qu'elle vérifie
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad v_0(k) = \frac{1}{2}\big(u(2k) + u(2k+1)\big).$$

2. Soit $u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Montrer que le signal $v \in E$ défini par
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad v(k) = u(2k+\alpha)$$
vérifie
$$\forall \xi \in [0,\pi], \quad \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\alpha\xi}{2}}\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2}\right) + e^{-\frac{i\alpha\xi}{2}}\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2} - \pi\right)\right).$$

3. Calculer, pour tout $\xi \in [0,\pi]$, $\widehat{v_0}(\xi)$ en fonction de $\widehat{u}$.

4. Soit $v \in E$ et $w = T_0(v)$. Exprimer $\widehat{w}(\xi)$ en fonction de $\widehat{v}$.

5. Montrer que pour tout $u \in E$, le problème (P_∞) admet une unique solution (notée v_∞), et calculer, pour tout $\xi \in [0,\pi]$, $\widehat{v_\infty}(\xi)$ en fonction de $\widehat{u}$.

6. Comparer les expressions obtenues pour $\widehat{v_0}(\xi)$ et $\widehat{v_\infty}(\xi)$, et interpréter les différences en termes d'artefacts attendus pour chacune des deux méthodes.

7. Soit $u \in E$. Montrer que si v est solution du problème (P_1), alors
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad ([1\ 6\ 1] \star v)(k) = ([2\ 4\ 2] \star u)(2k).$$

8. En déduire l'existence et l'unicité de la solution (notée v_1) du problème (P_1), et montrer que
$$\forall \xi \in [0,\pi], \quad \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{2}a(\xi)\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}b(\xi)\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2} - \pi\right),$$
où a et b sont des fonctions que l'on explicitera.

9. Étudier les fonction a et b et représenter leurs graphes sur $[0,\pi]$, puis interpréter le résultat en termes d'artefacts attendus sur v_1 par rapport aux réductions v_0 et v_∞.