Exercice 6 (coordonnées homogènes)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et $\mathcal{P}(E)$ l'espace projectif associé, c'est-à-dire le quotient de $E^* = E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par

$$\forall v, w \in E^*, \quad v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ w = \lambda v.$$

1. Montrer que l'application projection perspective $\mathcal{P}$ vue en cours vérifie

$$\forall (x, y, X, Y, Z) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+^*, \quad (x, y) = \mathcal{P}(X, Y, Z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

2. Soit A une matrice inversible d'ordre n. Montrer que

$$\forall v, w \in E^*, \quad \bar{v} = \bar{w} \ \Leftrightarrow \ \overline{Av} = \overline{Aw}.$$

   En déduire que l'on définit de manière unique une bijection a de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même par

$$\forall x \in \mathcal{P}(E), \quad a(x) = \overline{Av},$$

   où v est un vecteur quelconque de E^* qui vérifie $\bar{v} = x$. On dira que a est l'application projective associée à la matrice A, et que A est une matrice en coordonnées homogènes de a. Quelles sont les autres matrices A' qui définissent la même application associée a ?

3. On appelle homographie du plan toute fonction f du plan dans lui-même définie à partir d'une application projective h sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ par

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x', y') \ \Leftrightarrow \ \overline{(x', y', 1)} = h(\overline{(x, y, 1)}).$$

   Faire le lien avec les formules vues en cours pour la définition d'une homographie.

4. Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre n, et a et b les applications projectives associées. Montrer que $a \circ b$ est l'application projective associée à la matrice AB, et que a^{-1} est l'application projective associée à la matrice A^{-1}.

5. En déduire que la composée de deux homographies du plan est une homographie et que l'inverse d'une homographie est une homographie (on se contentera de montrer la coïncidence presque partout, sans s'attarder sur les points où ces applications ne sont pas définies, qui nécessiteraient l'introduction de "points à l'infini").

6. On considère une caméra "tête d'épingle" de centre optique O, d'axe optique (OZ), et de focale f, et l'on note (x, y) la projection d'un point $M \in \mathbb{R}^3$ sur le plan image (plan pseudo-focal). On "dépointe" alors la caméra en la faisant tourner sur elle-même (par une rotation R de $\mathbb{R}^3$) tout en maintenant fixe son centre optique. Le point M se projette alors sur le plan image (dont le repère local a aussi tourné selon R) en (x', y'). Montrer que la relation qui lie (x', y') à (x, y) est une homographie du plan, et donner sa représentation en coordonnées homogènes en fonction de f et R.

Exercice 7 (redresser une image)

Un collégien photographie une figure de son livre de maths, puis l'imprime. Il constate alors qu'un carré de la figure est déformé: trois de ses sommets sont exactement à leur place, mais le quatrième est légèrement décalé comme sur la figure ci-dessous (le carré initial est superposé en pointillés). Expliciter, dans le repère de votre choix, la transformation géométrique du plan à appliquer pour retrouver l'image initiale.