Exercice 17 (super-résolution, cas de signaux infinis)

On considère une fonction $U \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) telle que $\mathrm{supp}(\widehat{U}) \subset [-2\pi, 2\pi]$, et deux signaux discrets $u_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et $u_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définis par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u_1(k) = U(k) \quad \text{et} \quad u_2(k) = U(k + \alpha),$$

où α est un réel fixé.

1. Le signal u_1 est il bien échantillonné ou aliasé ? Même question pour u_2.
2. Exprimer les transformées de Fourier de u_1 et de u_2 en fonction de celle de U (indication: procéder par identification plutôt que par un calcul direct).
3. À quelle condition sur α peut-on reconstruire U à partir de u_1 et u_2 ? Justifier le terme “super-résolution” utilisé dans le titre de l'exercice.