Imagerie sous-pixellique — M2 MVA – L.Moisan

---

**Exercice 25 (réduction d'images)**

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} |u(k,l)| < \infty.$$

On considère trois opérateurs $R_1, R_2, R_3 : \ell^1(\mathbb{Z}^2) \to \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ permettant d'effectuer un zoom arrière de facteur 2 sur une image discrète $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$. L'opérateur $R_1$ consiste en une convolution par le noyau

$$K_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

suivi d'une réduction de facteur 2 obtenue par moyennage sur des blocs 2×2 (simulation de capteurs jointifs). L'opérateur $R_2$ consiste en une convolution par le noyau $K_2(k,l) = \varphi(k)\varphi(l)$ défini par

$$\varphi = [\lambda \;\; 1-2\lambda \;\; \lambda]$$

($\lambda$ étant un paramètre positif fixé), suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2. L'opérateur $R_3$ est la réduction optimale au sens de l'interpolation de Shannon (coupure fréquentielle brutale suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2).

1. Montrer que $R_1$ et $R_2$ coïncident pour une valeur de $\lambda$ bien choisie.

2. On pose $v_3 = R_3 u$. Exprimer $\widehat{v_3}$ en fonction de $\widehat{u}$.

3. Exprimer de même $\widehat{v_2}$ en fonction de $\widehat{u}$, où $v_2 = R_2 u$.

4. En comparant les formules obtenues pour $\widehat{v_2}$ et $\widehat{v_3}$, expliquer pourquoi l'opérateur $R_2$ va en général introduire du flou et de l'aliasing.

5. Montrer que si $0 \le \lambda \le \lambda_c$ ($\lambda_c$ étant une constante à préciser), alors $R_2$ est monotone. Quelle conséquence cela a-t-il en termes de ringing sur $v_2$ ?

---