

Exercice 26

L'opérateur différentiel $F(u, Du) = u_x/u_y$ est-il invariant par changement de contraste ?
Même question pour l'opérateur différentiel $F(u, Du, D^2u) = u_{xx}/u_{yy}$.

Exercice 27

Construire un filtre linéaire 3×3 consistant avec

$$F(u, Du, D^2u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Exercice 28

Étudier la consistance des opérateurs discrets suivants:

$$a) \quad Tu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \star u.$$

$$b) \quad Tu(i, j) = \max(u(i+1, j), u(i-1, j), u(i, j+1), u(i, j-1)) - u(i, j).$$

Exercice 29 (schémas 2×2)

Quels sont les opérateurs différentiels F que l'on peut implémenter avec un schéma 2×2 , i.e. un opérateur discret T consistant avec F tel que $Tu(i, j)$ ne dépend que de $u(i, j)$, $u(i+1, j)$, $u(i, j+1)$, et $u(i+1, j+1)$?

Exercice 30 (convolutions itérées)

1. Montrer que si φ est une fonction mesurable, positive, paire, à support compact et telle que $\int \varphi = 1$, alors à renormalisation près (à définir), la suite de fonctions (f_n) définie par $f_1 = \varphi$ et $f_{n+1} = f_n * \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers une fonction de Gauss.
2. Nous allons vérifier ce résultat expérimentalement. Créez un signal simple vérifiant les contraintes suivantes :
 - a) la somme des valeurs est 1;
 - b) l'ensemble des valeurs est symétrique (palindrome);
 - c) la dimension est impaire.

Par exemple,

```
import numpy as np
s = np.array([3,2,0,1,4,0,4,1,0,2,3])/20
```

Ensuite, convolvez le signal que vous venez de créer $n - 1$ fois avec lui-même (utilisez la syntaxe `t = np.convolve(s, k)` pour calculer $t = s * k$) et visualisez le résultat au moyen de la commande `plot` de `matplotlib.pyplot`. Appliquez le procédé pour des valeurs de n de plus en plus grandes et vérifiez que le résultat est conforme à vos attentes.

3. Essayez la même chose pour plusieurs signaux non positifs (mais qui vérifient les trois conditions a,b,c ci-dessus). Qu'observez-vous ? Pouvez-vous le justifier théoriquement ?
-