Examen — 16 décembre 2021

Tous documents et calculatrices interdits.

Exercice 1

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} |u(k,l)| < \infty.$$

On considère trois opérateurs $R_1, R_2, R_3 : \ell^1(\mathbb{Z}^2) \to \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ permettant d'effectuer un zoom arrière de facteur 2 sur une image discrète $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$. L'opérateur R_1 consiste en une convolution par le noyau

$$K_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

suivi d'une réduction de facteur 2 obtenue par moyennage sur des blocs 2×2 (simulation de capteurs jointifs). L'opérateur R_2 consiste en une convolution par le noyau $K_2(k,l) = \varphi(k)\varphi(l)$ défini par

$$\varphi = [\lambda \;\; 1-2\lambda \;\; \lambda]$$

(λ étant un paramètre positif fixé), suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2. L'opérateur R_3 est la réduction optimale au sens de l'interpolation de Shannon (coupure fréquentielle brutale suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2).

1. Montrer que R_1 et R_2 coïncident pour une valeur de λ bien choisie.
2. On pose $v_3 = R_3 u$. Exprimer $\widehat{v_3}$ en fonction de $\widehat{u}$.
3. Exprimer de même $\widehat{v_2}$ en fonction de $\widehat{u}$, où $v_2 = R_2 u$.
4. En comparant les formules obtenues pour $\widehat{v_2}$ et $\widehat{v_3}$, expliquer pourquoi l'opérateur R_2 va en général introduire du flou et de l'aliasing.
5. Montrer que si $0 \leq \lambda \leq \lambda_c$ (λ_c étant une constante à préciser), alors R_2 est monotone. Quelle conséquence cela a-t-il en termes de ringing sur v_2 ?

Exercice 2

On considère une fonction $U \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) telle que $\mathrm{supp}(\widehat{U}) \subset [-2\pi, 2\pi]$, et deux signaux discrets $u_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et $u_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définis par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u_1(k) = U(k) \quad \text{et} \quad u_2(k) = U(k+\alpha),$$

où α est un réel fixé.

1. Exprimer les transformées de Fourier de u_1 et de u_2 en fonction de celle de U.
2. À quelle condition sur α peut-on reconstruire U à partir de u_1 et u_2 ?

Exercice 3

Soit u une image discrète de taille $N \times N$, et $\alpha \in]0,1[$. On translate (périodiquement) u d'un vecteur $(\alpha, 0)$ par interpolation bilinéaire, puis on translate l'image discrète ainsi obtenue d'un vecteur $(-\alpha, 0)$ par la même méthode. On note v l'image obtenue après ces deux opérations.

1. Exprimer la transformée de Fourier de v en fonction de celle de u.
2. Visuellement, quelle différence s'attend-on à constater entre u et v ?
3. À quelles conditions sur α et N peut-on retrouver u à partir de v ?

Exercice 4

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Détailler deux raisons qui justifient l'intérêt de construire des téléscopes de grand diamètre.
2. Trouver un filtre de rang consistant avec l'opérateur différentiel $F(u, Du) = |\frac{\partial u}{\partial x}|$.
3. Un collégien photographie une figure de son livre de maths, puis l'imprime. Il constate alors qu'un carré de la figure est déformé: trois de ses sommets sont exactement à leur place, mais le quatrième est légèrement décalé comme sur la figure ci-dessous (le carré initial est superposé en pointillés). Expliciter, dans le repère de votre choix, la transformation géométrique à appliquer pour redresser l'image.