---

## Exercice 1 (Diffraction par une pupille circulaire)

1) Calculer numériquement dans un vecteur $f$, et tracer à l'écran pour $0 < r < 10$, le profil du noyau de diffraction (normalisé)

$$r \mapsto \left(\frac{2J_1(r)}{r}\right)^2.$$

La fonction de Bessel $J_1(r)$ s'écrit en Matlab/Octave `besselj(1,r)`. Visualiser aussi la fonction $\min(f, 0.1)$ pour bien voir les rebonds. On prendra soin d'éviter la quantité indéterminée $0/0$ dans les calculs numériques.

2) Calculer de même une image de la tache d'Airy pour $-10 \leq x, y \leq 10$. On pourra utiliser la commande `meshgrid`. Visualiser le résultat avec `imshow`, d'abord sans saturation, puis avec saturation pour bien voir les anneaux.

3) Visualiser, de façon similaire aux questions précédentes, le profil radial puis l'image bidimensionnelle de la fonction de transfert de modulation (FTM = module de la transformée de Fourier de la tache de diffraction, voir poly p.18). Essayer d'obtenir numériquement le même résultat en calculant la transformée de Fourier discrète (commande `fft2`) d'une tache d'Airy calculée sur le domaine $[-100, 100]^2$ et discrétisée avec un pas suffisament fin pour obtenir une estimation raisonnable de la FTM. On pensera à utiliser la commande `fftshift` pour centrer le domaine fréquentiel après calcul de la transformée de Fourier discrète.

4) Déterminer numériquement à quelle distance critique deux taches d'Airy deviennent indiscernables au sens où le profil d'intensité sur la droite qui joint les centres n'admet plus qu'un seul maximum. On exprimera le résultat en proportion du rayon d'Airy (qui est la distance critique adoptée par le critère de Rayleigh). On rappelle que

$$\frac{d}{dt}\left(t^m J_m(t)\right) = t^m J_{m-1}(t).$$

5) En reprenant les calculs vus en cours (voir aussi le poly p.10), donner l'expression explicite du noyau de diffraction associé à une pupille de téléscope (disque de diamètre $D$ occulté au centre par un disque de diamètre $\varepsilon D$).

6) Vérifier numériquement, en réutilisant les codes de la question 3, que le support de la FTM n'est pas affecté par l'occlusion centrale (on pourra prendre $\varepsilon = 1/4$). Qu'en déduire sur les résolutions respectives d'un téléscope et d'une lunette de mêmes diamètres ?

---

## Exercice 2 (Diffraction par un téléscope)

1) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée à support compact. On pose

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} + \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

($\Gamma$ est appelée *fonction d'autocorrélation* de $g$). Montrer que l'on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{\Gamma}(\xi) = |\hat{g}(\xi)|^2.$$

2) Soit $P$ une pupille plane symétrique ($P$ compact de $\mathbb{R}^2$ symétrique par rapport à 0), et $K$ le noyau de diffraction associé à $P$. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{K}(\xi) = \alpha \Gamma(\beta \xi),$$

où $\Gamma$ est la fonction d'autocorrélation de $1_P$ ($1_P(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in P$, 0 sinon), et $\alpha$, $\beta$ deux constantes que l'on explicitera. Interpréter $\Gamma(\mathbf{x})$ géométriquement.

3) En déduire l'expression de $\hat{K}(\xi)$ quand $P$ est un disque de rayon $R$. Représenter graphiquement le profil radial correspondant.

4) Représenter qualitativement (en le comparant à celui obtenu à la question 3) le profil radial de $\hat{K}$ lorsque $P$ est un disque avec occlusion centrale (couronne), défini par

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon R \leq |\mathbf{x}| \leq R\}$$

(on suppose $\varepsilon < 1/3$). L'occlusion centrale entraîne-t-elle une réduction du domaine spectral (intervalle de fréquences) transmis par le système optique ?

5) *Question facultative.* Expliciter $\hat{K}(\xi)$ lorque $P$ est la couronne définie précédemment (on pourra supposer $\varepsilon << 1$ et négliger les termes en $o(\varepsilon^2)$).

---

## Exercice 3

1) Au plus près de la terre, la planète saturne est visible sous un diamètre apparent de 20 secondes d'arc (1 seconde d'arc = 1/3600 degré). Combien de pixels son image mesure-t-elle (en diamètre) au foyer d'un téléscope de diamètre $D = 100$ mm équipé d'une caméra réalisant exactement l'échantillonnage critique correspondant à la limite spectrale de la diffraction ?

2) A quelle distance d'un téléviseur Full HD (1080 lignes) de 40 pouces (50 cm de hauteur) faut-il se placer pour être sûr de ne plus pouvoir distinguer les pixels de l'écran à l'œil nu ?
*Indication: le diamètre de la pupille ouverte au maximum est d'environ 5mm chez l'homme.*

3) Pour un appareil photo numérique dont le capteur de 30 Mpixels est en plein format (24mm $\times$ 36mm), à partir de quelle ouverture (rapport $f/D$) est-on en situation de sur-échantillonnage par rapport aux effets de la diffraction ? (on distinguera les deux longueurs d'onde extrêmes du spectre visible)

---