
Exercice 15 (existence de l'interpolation spline)

On note $\beta^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2,1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que pour n pair, β^n définit bien un noyau d'interpolation indirecte exacte.

Exercice 16 (interpolation spline, cadre périodique)

1) On pose $x_+ = \max(x, 0)$. Calculer $\displaystyle\int_a^b x_+^n \, dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_a^b x_+^n \, dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On note $\beta^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2,1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(x - k + \frac{n+1}{2} \right)_+^n .$$

3) Soient $u, v, w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Montrer que si u et v sont N-périodiques et $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors les relations

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \qquad u(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) w(l-k) \tag{1}$$

$$\text{et} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \qquad \widehat{u}(p) = \widehat{v}(p) \widehat{w}\left(\frac{2\pi p}{N}\right) \tag{2}$$

sont équivalentes.

4) Montrer que pour tout signal N-périodique $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, il existe un unique signal N-périodique $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tel que la fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k)$$

définisse une interpolation exacte de u, et donner la relation liant $\widehat{c}$ et $\widehat{u}$.

5) Soit u un signal N-périodique et u_2 un zoom de u de facteur 2 obtenu par interpolation spline cubique (u_2 est donc un signal $2N$-périodique). Calculer explicitement $\widehat{u_2}$ en fonction de $\widehat{u}$, et tracer le graphe de la fonction qui les relie. Interpréter le résultat par rapport à l'interpolation de Shannon (cf. exercice 17).

Exercice 17 (interprétation spectrale de l'interpolation (bi)linéaire)

1) Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un signal discret, et v son translaté de $1/2$ par interpolation linéaire. Exprimer $\hat{v}$ en fonction de $\hat{u}$, puis de $\hat{w}$, où w est le translaté de u obtenu par interpolation de Shannon.

2) Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un signal discret, et v le signal obtenu au moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation linéaire. Exprimer $\hat{v}$ en fonction de $\hat{u}$, et la comparer à $\hat{w}$, où w est le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.

3) Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une image discrète ($\Omega = \{0, ..., M-1\} \times \{0, ..., N-1\}$), et v l'image obtenue moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation bilinéaire (avec condition de bord périodique). Exprimer la transformée de Fourier discrète de v ($\hat{v}$) en fonction de celle de u, et la comparer à celle de w, le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.

Exercice 18 (zoom)

On considère le problème du zoom, c'est-à-dire de l'agrandissement d'une image par suréchantillonnage. On se propose ici de comparer plusieurs méthodes d'interpolation. Pour chacune des images `crop_*.pgm`, effectuer un zoom de facteur 16 au moyen de la commande

```
v = im.fzoom(u, 16, n)
```

où le paramètre n est choisi dans $\{0, 1, 3, 5, ...\}$ pour une interpolation spline d'ordre n, et $n = -3$ pour l'interpolation bicubique Keys.

Quelle semble être la meilleure méthode pour `crop_bouc.pgm` ? et pour `crop_cameraman.pgm` ? En visualisant les transformées de Fourier des images originales dont sont issues ces imagettes (`bouc.pgm` et `cameraman.pgm`), pouvez-vous expliquer pourquoi la meilleure méthode d'interpolation n'est pas la même dans les deux cas?

Exercice 19 (rotations itérées)

La rotation d'une image est un transformation intéressante car elle met bien en évidence la capacité d'un interpolateur à préserver l'information contenue dans l'image. Commençons par "préparer" l'image `u` (par exemple `lena.pgm`) en la limitant à un disque

```
um = (u/255) * im.contrast_change(im.distcenter(u, 'n'), [0,0.8,0.85], [1,1,0])
im.View(um)
```

Faisons-lui maintenant subir 35 rotations de 10 degrés et affichons la séquence ainsi produite :

```
m = np.zeros((36,)+um.shape) # séquence de 36 images
m[0] = um
for i in range(35):
    m[i+1] = im.frot(m[i], 10, 0)
im.View(m)
```

Le résultat est catastrophique mais ce n'est pas très étonnant compte tenu du fait que nous avons effecté la rotation au moyen d'une interpolation au plus proche voisin (ordre 0 dans `frot`).

Nous pouvons maintenant faire varier la méthode d'interpolation en changeant cette valeur (le troisième argument de `frot`, qui spécifie la méthode d'interpolation comme pour la fonction `fzoom`). Tester ainsi les valeurs $n = 1, -3, 3, 5$ en générant directement le résultat après 36 rotations (sans le film) par

```
v = um
for i in range(36):
    v = im.frot(v, 10, 0)
im.View(np.stack((um, v)))
```

Vous pouvez aussi bien sûr changer le nombre de rotations et l'angle correspondant.

Comparez et commentez les résultats obtenus pour chaque méthode d'interpolation ($n = 1, -3, 3, 5, ...$), en particulier la différence entre les cas $n = 3$ et $n = -3$.

Comparer enfin les résultats précédents à la rotation par interpolation de Shannon (voir exercice 18), obtenue en remplaçant simplement l'instruction `frot(v, 10, 0)` par `fftrot(v, 10)`.

Que concluez-vous ? Pourquoi n'y a-t-il (quasiment) aucune perte d'information ?

Exercice 20 (interpolation par sinus cardinal tronqué)

Soit p un entier naturel non nul. On souhaite réaliser l'interpolation d'un signal discret au moyen de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{sinc}(x) & \text{si} \quad |x| \leq p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où sinc est le prolongement continu en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

1. S'agit-il d'une interpolation directe ou indirecte ?
2. Calculer la transformée de Fourier de φ.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\int_n^{n+1} \operatorname{sinc}(x)\, dx$ est du signe de $(-1)^n$.
4. En déduire que $\hat{\varphi}(0) \neq 1$.
5. Soit $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz). On note f_δ l'approximation de f obtenue après interpolation par φ des échantillons $(f(k\delta))_{k\in\mathbb{Z}}$. Montrer que $\hat{f_\delta}(0) = \hat{\varphi}(0) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi\delta^{-1})$.
6. En déduire que si $\hat{f}(0) \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\delta - f| \neq 0$. Conclure.

Exercice 21 (interpolation linéaire décalée)

Soit $u(k), k \in \mathbb{Z}$ un signal discret à support fini ($u(k) \neq 0$ pour un nombre fini d'indices k seulement). Pour $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on envisage d'interpoler u par

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\psi(x-k), \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 - |x-\alpha| & \text{si} \quad |x-\alpha| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Expliciter $\hat{c}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)e^{-ik\xi}$ en fonction de $\hat{u}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$ de façon à ce que l'interpolation de u par v soit exacte (u et v coïncident sur $\mathbb{Z}$). Que se passe t-il pour $\alpha = \frac{1}{2}$?

2) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c(k) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}c(k-1) + \frac{1}{1-\alpha}u(k).$$

3) On suppose que $u(k) = f(k\delta)$ pour un certain $\delta \in]0, 1]$, avec $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz) et $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$. Montrer que si $v_\delta(x) = v(x/\delta)$, alors

$$e_\delta := \int_{-\pi}^{\pi} \left|\hat{f}(\xi) - \widehat{v_\delta}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - \hat{\varphi}(\delta\xi)|^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

où φ est la fonction interpolatrice directe associée à ψ.

4) En déduire que

$$\sqrt{e_\delta} = C(\alpha)\|f''\|_2 \cdot \delta^2 + \underset{\delta \to 0}{o}(\delta^2)$$

pour une certaine fonction $C(\alpha)$ à préciser.

5) Donner la valeur α_0 de α qui minimise $C(\alpha)$, puis discuter selon la valeur de α la pertinence et l'intérêt de la méthode d'interpolation proposée.