

Exercice 22

L'opérateur différentiel $F(u, Du) = u_x/u_y$ est-il invariant par changement de contraste ?
Même question pour l'opérateur différentiel $F(u, Du, D^2u) = u_{xx}/u_{yy}$.

Exercice 23

Construire un filtre linéaire 3×3 consistant avec

$$F(u, Du, D^2u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Exercice 24

Étudier la consistance des opérateurs discrets suivants:

$$a) \quad Tu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \star u.$$

$$b) \quad Tu(i, j) = \max(u(i+1, j), u(i-1, j), u(i, j+1), u(i, j-1)) - u(i, j).$$

Exercice 25 (schémas 2×2)

Quels sont les opérateurs différentiels F que l'on peut implémenter avec un schéma 2×2 , i.e. un opérateur discret T consistant avec F tel que $Tu(i, j)$ ne dépend que de $u(i, j)$, $u(i+1, j)$, $u(i, j+1)$, et $u(i+1, j+1)$?

Exercice 26 (convolutions itérées)

1. Montrer que si φ est une fonction mesurable, positive, paire, à support compact et telle que $\int \varphi = 1$, alors à renormalisation près (à définir), la suite de fonctions (f_n) définie par $f_1 = \varphi$ et $f_{n+1} = f_n * \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers une fonction de Gauss.
2. Nous allons vérifier ce résultat expérimentalement. Créez un signal simple vérifiant les contraintes suivantes :
 - a) la somme des valeurs est 1;
 - b) l'ensemble des valeurs est symétrique (palindrome);
 - c) la dimension est impaire.

Par exemple,

$$\mathbf{s} = [3, 2, 0, 1, 4, 0, 4, 1, 0, 2, 3] / 20;$$

Ensuite, convolez le signal que vous venez de créer $n - 1$ fois avec lui-même (utilisez l'appel `t = conv(s, k)` pour calculer $t = s * k$) et visualisez le résultat au moyen de la commande `plot`. Appliquez le procédé pour des valeurs de n de plus en plus grandes et vérifiez que le résultat est conforme à vos attentes.

3. Essayez la même chose pour plusieurs signaux non positifs (mais qui vérifient les trois conditions a,b,c ci-dessus). Qu'observez-vous ? Pouvez-vous le justifier théoriquement ?

Exercice 27 (réduction d'images)

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} |u(k,l)| < \infty.$$

On considère trois opérateurs $R_1, R_2, R_3 : \ell^1(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ permettant d'effectuer un zoom arrière de facteur 2 sur une image discrète $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$. L'opérateur R_1 consiste en une convolution par le noyau

$$K_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

suivi d'une réduction de facteur 2 obtenue par moyennage sur des blocs 2×2 (simulation de capteurs jointifs). L'opérateur R_2 consiste en une convolution par le noyau $K_2(k,l) = \varphi(k)\varphi(l)$ défini par

$$\varphi = [\lambda \quad 1 - 2\lambda \quad \lambda]$$

(λ étant un paramètre positif fixé), suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2. L'opérateur R_3 est la réduction optimale au sens de l'interpolation de Shannon (coupure fréquentielle brutale suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2).

1. Montrer que R_1 et R_2 coïncident pour une valeur de λ bien choisie.
2. On pose $v_3 = R_3 u$. Exprimer \widehat{v}_3 en fonction de \widehat{u} .
3. Exprimer de même \widehat{v}_2 en fonction de \widehat{u} , où $v_2 = R_2 u$.
4. En comparant les formules obtenues pour \widehat{v}_2 et \widehat{v}_3 , expliquer pourquoi l'opérateur R_2 va en général introduire du flou et de l'aliasing.
5. Montrer que si $0 \leq \lambda \leq \lambda_c$ (λ_c étant une constante à préciser), alors R_2 est monotone. Quelle conséquence cela a-t-il en termes de ringing sur v_2 ?