
Exercice 22

L'opérateur différentiel $F(u, Du) = u_x/u_y$ est-il invariant par changement de contraste ? Même question pour l'opérateur différentiel $F(u, Du, D^2u) = u_{xx}/u_{yy}$.

Exercice 23

Construire un filtre linéaire 3×3 consistant avec

$$F(u, Du, D^2u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Exercice 24

Étudier la consistance des opérateurs discrets suivants:

a) $Tu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \star u.$

b) $Tu\,(i,j) = \max\Big(u(i+1,j), u(i-1,j), u(i,j+1), u(i,j-1)\Big) - u(i,j).$

Exercice 25 (schémas 2×2)

Quels sont les opérateurs différentiels F que l'on peut implémenter avec un schéma 2×2, i.e. un opérateur discret T consistant avec F tel que $Tu(i,j)$ ne dépend que de $u(i,j)$, $u(i+1,j)$, $u(i,j+1)$, et $u(i+1,j+1)$?

Exercice 26 (convolutions itérées)

1. Montrer que si φ est une fonction mesurable, positive, paire, à support compact et telle que $\int \varphi = 1$, alors à renormalisation près (à définir), la suite de fonctions (f_n) définie par $f_1 = \varphi$ et $f_{n+1} = f_n * \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers une fonction de Gauss.

2. Nous allons vérifier ce résultat expérimentalement. Créez un signal simple vérifiant les contraintes suivantes :

   a) la somme des valeurs est 1;

   b) l'ensemble des valeurs est symétrique (palindrome);

   c) la dimension est impaire.

Par exemple,

```
import numpy as np
s = np.array([3,2,0,1,4,0,4,1,0,2,3])/20
```

Ensuite, convolez le signal que vous venez de créer $n-1$ fois avec lui-même (utilisez la syntaxe `t = np.convolve(s, k)` pour calculer $t = s*k$) et visualisez le résultat au moyen de la commande `plot` de `matplotlib.pyplot`. Appliquez le procédé pour des valeurs de n de plus en plus grandes et vérifiez que le résultat est conforme à vos attentes.

3. Essayez la même chose pour plusieurs signaux non positifs (mais qui vérifient les trois conditions a,b,c ci-dessus). Qu'observez-vous ? Pouvez-vous le justifier théoriquement ?

Exercice 27 (réduction d'images)

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} |u(k,l)| < \infty.$$

On considère trois opérateurs $R_1, R_2, R_3 : \ell^1(\mathbb{Z}^2) \to \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ permettant d'effectuer un zoom arrière de facteur 2 sur une image discrète $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$. L'opérateur R_1 consiste en une convolution par le noyau

$$K_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

suivi d'une réduction de facteur 2 obtenue par moyennage sur des blocs 2×2 (simulation de capteurs jointifs). L'opérateur R_2 consiste en une convolution par le noyau $K_2(k,l) = \varphi(k)\varphi(l)$ défini par

$$\varphi = [\lambda \;\; 1-2\lambda \;\; \lambda]$$

(λ étant un paramètre positif fixé), suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2. L'opérateur R_3 est la réduction optimale au sens de l'interpolation de Shannon (coupure fréquentielle brutale suivie d'un sous-échantillonnage de facteur 2).

1. Montrer que R_1 et R_2 coïncident pour une valeur de λ bien choisie.

2. On pose $v_3 = R_3 u$. Exprimer $\widehat{v_3}$ en fonction de $\widehat{u}$.

3. Exprimer de même $\widehat{v_2}$ en fonction de $\widehat{u}$, où $v_2 = R_2 u$.

4. En comparant les formules obtenues pour $\widehat{v_2}$ et $\widehat{v_3}$, expliquer pourquoi l'opérateur R_2 va en général introduire du flou et de l'aliasing.

5. Montrer que si $0 \le \lambda \le \lambda_c$ (λ_c étant une constante à préciser), alors R_2 est monotone. Quelle conséquence cela a-t-il en termes de ringing sur v_2 ?
