

Exercice 18 (existence de l'interpolation spline)

On note $\beta^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2, 1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que pour n pair, β^n définit bien un noyau d'interpolation indirecte exacte.

Exercice 19 (interpolation spline, cadre périodique)

1) On pose $x_+ = \max(x, 0)$. Calculer $\int_a^b x_+^n dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) On note $\beta^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2, 1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(x - k + \frac{n+1}{2}\right)_+^n.$$

3) Soient $u, v, w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si u et v sont N -périodiques et $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors les relations

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad u(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k)w(l-k) \tag{1}$$

$$\text{et } \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \hat{u}(p) = \hat{v}(p)\hat{w}\left(\frac{2\pi p}{N}\right) \tag{2}$$

sont équivalentes.

4) Montrer que pour tout signal N -périodique $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique signal N -périodique $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que la fonction $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\beta^n(x-k)$$

définisse une interpolation exacte de u , et donner la relation liant \hat{c} et \hat{u} .

5) Soit u un signal N -périodique et u_2 un zoom de u de facteur 2 obtenu par interpolation spline cubique (u_2 est donc un signal $2N$ -périodique). Calculer explicitement \hat{u}_2 en fonction de \hat{u} , et tracer le graphe de la fonction qui les relie. Interpréter le résultat par rapport à l'interpolation de Shannon (cf. exercice 20).

Exercice 20 (interprétation spectrale de l'interpolation (bi)linéaire)

- 1) Soit $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ un signal discret, et v son translaté de $1/2$ par interpolation linéaire. Exprimer \hat{v} en fonction de \hat{u} , puis de \hat{w} , où w est le translaté de u obtenu par interpolation de Shannon.
 - 2) Soit $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ un signal discret, et v le signal obtenu au moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation linéaire. Exprimer \hat{v} en fonction de \hat{u} , et la comparer à \hat{w} , où w est le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.
 - 3) Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une image discrète ($\Omega = \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$), et v l'image obtenue au moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation bilinéaire (avec condition de bord périodique). Exprimer la transformée de Fourier discrète de v (\hat{v}) en fonction de celle de u , et la comparer à celle de w , le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.
-

Exercice 21 (zoom)

On considère le problème du zoom, c'est-à-dire de l'agrandissement d'une image par suréchantillonnage. On se propose ici de comparer plusieurs méthodes d'interpolation. Pour chacune des images `crop_*.pgm`, effectuer un zoom de facteur 16 au moyen de la commande

```
v = im.fzoom(u, 16, n)
```

où le paramètre n est choisi dans $\{0, 1, 3, 5, \dots\}$ pour une interpolation spline d'ordre n , et $n = -3$ pour l'interpolation bicubique Keys.

Quelle semble être la meilleure méthode pour `crop_bouc.pgm` ? et pour `crop_cameraman.pgm` ? En visualisant les transformées de Fourier des images originales dont sont issues ces images (`bouc.pgm` et `cameraman.pgm`), pouvez-vous expliquer pourquoi la meilleure méthode d'interpolation n'est pas la même dans les deux cas ?

Exercice 22 (rotations itérées)

La rotation d'une image est une transformation intéressante car elle met bien en évidence la capacité d'un interpolateur à préserver l'information contenue dans l'image. Commençons par "préparer" l'image `u` (par exemple `lena.pgm`) en la limitant à un disque

```
um = (u/255) * im.contrast_change(im.distcenter(u, 'n'), [0,0.8,0.85], [1,1,0])
im.View(um)
```

Faisons-lui maintenant subir 35 rotations de 10 degrés et affichons la séquence ainsi produite :

```
m = np.zeros((36,)+um.shape) # séquence de 36 images
m[0] = um
for i in range(35):
    m[i+1] = im.frot(m[i], 10, 0)
im.View(m)
```

Le résultat est catastrophique mais ce n'est pas très étonnant compte tenu du fait que nous avons effectué la rotation au moyen d'une interpolation au plus proche voisin (ordre 0 dans `frot`).

Nous pouvons maintenant faire varier la méthode d'interpolation en changeant cette valeur (le troisième argument de `frot`, qui spécifie la méthode d'interpolation comme pour la fonction `fzoom`). Tester ainsi les valeurs $n = 1, -3, 3, 5$ en générant directement le résultat après 36 rotations (sans le film) par

```
v = um
for i in range(36):
    v = im.frot(v, 10, 0)
im.View(np.stack((um, v)))
```

Vous pouvez aussi bien sûr changer le nombre de rotations et l'angle correspondant.

Comparez et commentez les résultats obtenus pour chaque méthode d'interpolation ($n = 1, -3, 3, 5, \dots$), en particulier la différence entre les cas $n = 3$ et $n = -3$.

Comparer enfin les résultats précédents à la rotation par interpolation de Shannon (voir exercice 21), obtenue en remplaçant simplement l'instruction `frot(v, 10, 0)` par `ffrot(v, 10)`.

Que concluez-vous ? Pourquoi n'y a-t-il (quasiment) aucune perte d'information ?

Exercice 23 (interpolation par sinus cardinal tronqué)

Soit p un entier naturel non nul. On souhaite réaliser l'interpolation d'un signal discret au moyen de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{sinc}(x) & \text{si } |x| \leq p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où sinc est le prolongement continu en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

1. S'agit-il d'une interpolation directe ou indirecte ?
 2. Calculer la transformée de Fourier de φ .
 3. Montrer que pour tout entier naturel n , $\int_n^{n+1} \operatorname{sinc}(x) dx$ est du signe de $(-1)^n$.
 4. En déduire que $\hat{\varphi}(0) \neq 1$.
 5. Soit $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz). On note f_δ l'approximation de f obtenue après interpolation par φ des échantillons $(f(k\delta))_{k \in \mathbb{Z}}$. Montrer que $\hat{f}_\delta(0) = \hat{\varphi}(0) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi\delta^{-1})$.
 6. En déduire que si $\hat{f}(0) \neq 0$, alors $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\delta - f| \neq 0$. Conclure.
-

Exercice 24 (interpolation linéaire décalée)

Soit $u(k), k \in \mathbb{Z}$ un signal discret à support fini ($u(k) \neq 0$ pour un nombre fini d'indices k seulement). Pour $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on envisage d'interpoler u par

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \psi(x - k), \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 - |x - \alpha| & \text{si } |x - \alpha| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Expliciter $\hat{c}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) e^{-ik\xi}$ en fonction de $\hat{u}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}$ de façon à ce que l'interpolation de u par v soit exacte (u et v coïncident sur \mathbb{Z}). Que se passe-t-il pour $\alpha = \frac{1}{2}$?

2) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c(k) = \frac{-\alpha}{1-\alpha} c(k-1) + \frac{1}{1-\alpha} u(k).$$

3) On suppose que $u(k) = f(k\delta)$ pour un certain $\delta \in]0, 1]$, avec $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz) et $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$. Montrer que si $v_\delta(x) = v(x/\delta)$, alors

$$e_\delta := \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\xi) - \hat{v}_\delta(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - \hat{\varphi}(\delta\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

où φ est la fonction interpolatrice directe associée à ψ .

4) En déduire que

$$\sqrt{e_\delta} = C(\alpha) \|f''\|_2 \cdot \delta^2 + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2)$$

pour une certaine fonction $C(\alpha)$ à préciser.

5) Donner la valeur α_0 de α qui minimise $C(\alpha)$, puis discuter selon la valeur de α la pertinence et l'intérêt de la méthode d'interpolation proposée.
