Exercices 1 à 5 (Arbres de décision et information)

Exercice 1. Soit Ω un ensemble fini.

a) Combien vaut, au maximum, l'information minimale apportée par une question ternaire (i.e. à 3 réponses possibles) ? Dans quels cas y a-t-il égalité ?

b) On suppose maintenant que Ω a 5 éléments. Étant données les partitions possibles de Ω, quelle est la valeur maximale atteignable pour l'information minimale apportée par une question ternaire sur Ω ? Dans quels cas y a-t-il égalité ? Comparer au résultat de la question a).

c) Répondre à la question b) dans le cas général d'un ensemble Ω à N éléments (on pourra distinguer les cas en fonction du fait que N est de la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$).

d) Montrer que si Ω est un ensemble de cardinal N, alors pour tout entier n l'information minimale apportée par une partition de Ω en n ensembles vaut au plus

$$f(N,n) = \log\left(\frac{N}{\lceil N/n \rceil}\right).$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

e) Montrer que l'on a toujours $f(N,n) \geqslant \log(n) - \dfrac{n-1}{N}$.

Exercice 2. On dispose de 12 pièces de monnaie, toutes de même poids à l'exception d'une seule pièce défectueuse dont le poids diffère des autres (elle est plus lourde ou plus légère, mais cette information n'est pas connue à l'avance). On cherche, en utilisant uniquement une balance à plateaux (permettant de dire si deux tas de pièces ont même poids ou de désigner le plus lourd dans le cas contraire), à déterminer quelle pièce est défectueuse et la nature du défaut (plus légère, ou plus lourde).

a) En utilisant un argument d'information algébrique, montrer qu'il faut au minimum 3 pesées pour résoudre systématiquement le problème.

b) Calculer, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 6$, la valeur maximale de l'information minimale obtenue lors d'une pesée réalisée avec deux tas quelconques de i pièces. En déduire la valeur de i optimale pour la première pesée.

c) Montrer que 3 pesées conviennent systématiquement en construisant un arbre de décision convenable.

d) On suppose maintenant qu'il y a 13 pièces au lieu de 12 (avec toujours exactement une pièce défectueuse). Calculer comme au b) la valeur maximale (notée m) de l'information minimale que l'on peut obtenir à la première pesée. Montrer que

$$m + 2\log 3 < \log 26,$$

et en déduire que 3 pesées ne conviennent plus systématiquement dans le cas de 13 pièces.

Exercice 3. Deux joueurs (notés A et B) jouent au jeu suivant: A choisit un nombre entier x entre 1 et N (N étant un nombre connu de A et B), et B doit le deviner en lui proposant successivement des valeurs. Pour chaque valeur possible de x proposée par B, A répond "gagné !", "x est plus petit", ou "x est plus grand".

a) Avant de jouer, B dit à A: "je n'ai pas besoin de plus de 4 propositions pour gagner". A répond alors à B: "C'est vrai, mais avec mon choix de x tu auras besoin d'exactement 4 propositions". Que vaut N ?

b) B répond alors: "Avec l'information que tu viens de me donner, je suis presque sûr de gagner avant." Expliquer le raisonnement de B et calculer la quantité d'information que lui a donnée A par sa réponse.

Exercice 4. Deux joueurs (notés A et B) jouent au jeu suivant: A choisit deux nombres entiers strictement positifs x et y dont la somme vaut au plus 6, et B doit deviner ces deux nombres en posant des questions binaires du type "est ce que x est au moins égal à n ?" ou "est ce que y est au moins égal à n ?" (n étant un entier quelconque).

a) Calculer l'information algébrique cachée par A.

b) Montrer que B ne peut être sûr de trouver x et y après seulement 4 questions. Cela contredit-il le résultat du a) ? Pourquoi ?

Exercice 5. Trouver toutes les distributions de probabilités discrètes $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ qui minimisent la fonction

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} -p_i \log p_i$$

(avec la convention $0 \log 0 = 0$). Interpréter le résultat en termes d'information.
