Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pres 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2010-2011, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n° 3 :
Limite - Continuité

Exercice 1

1) Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}},\ g(x)=\sqrt{x^2-2x-5x},\ h(x)=\ln(4x+3)$$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, décrire le domaine D de définition naturel, puis détailler les décompositions et opérations algébriques en jeu pour affirmer la continuité de la fonction sur D.
a) $f(x)=\sqrt{x^3-3}$; b) $g(x)=\ln\left\{(x-1)^2(x+2)^4\right\}$; c) $h(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)$.

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1),\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\quad c)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}g)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4},\quad e)\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2},\quad f)\ \lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}\sin(x)$$

Exercice 3
1) a - En utilisant la définition de la dérivée en 0 de la fonction $f(y)=\ln(1+y)$, montrer que

$$\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

b - En déduire $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
2) a - Déterminer la limite suivante $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$.
b - En déduire $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1},\quad b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)},\quad c)\ \lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\tan x,\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}x\sin x,\quad e)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

Exercice 5 Soit f la fonction partie entière : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \to & \lfloor x\rfloor \end{array}$
On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1) Tracer la courbe de f. En quels points est-elle continue? Parmi ses points de discontinuité, en quels points est-elle continue à gauche? continue à droite?

2) Etudier la continuité de la fonction $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2 \end{array}$

Exercice 6 On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels, c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si f est nulle sur $\mathbb{Q}$, alors f est identiquement nulle.

2) Si f et g sont égales sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire de f et g?

Exercice 7 Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.

Exercice 8 Soit $P(x)=x^3-2x^2+2$.

1) Calculer $P(-1)$ et $P(1)$. En déduire que P possède au moins une racine dans $[-1,1]$.

2) P possède-t-il une racine dans $[0,1]$?

Exercice 9 Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. (indication : regarder l'application g définie sur $[a,b]$ par $g(x)=f(x)-x$).

Exercice 10 Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{array}$ une fonction.

1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.

2) Prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11

1) Etudier les limites suivantes:

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1},\quad b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x},\quad ,c)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\tan 5x},\quad d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}},\quad e)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.$$

2) Etudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\lambda x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad b)\ \lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-\lambda}-\frac{1}{(x-2)^2}\right),\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$$

Exercice 12 Soit $\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^{1/x} \end{array}$ une fonction.

1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.

2) f peut-elle être prolongée par continuité en 0?

Exercice 13 Vrai ou faux?

1) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Si $f(a)=0$, il existe $c\in[a,b]$ tel que f soit croissante sur $[a,c]$.

2) Une fonction continue et croissante sur un segment est injective.

3) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, alors f atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et bornée, alors $f(\mathbb{R})$ est un segment.

5) Soit $f[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, alors f est bornée.

Exercice 14 Soit $f:[0,5]\to[0,5]$ telle que $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ pour tout $x,y\in[0,5]$, $x\neq y$.

1) Montrer que f est continue sur $[0,5]$.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $[0,5]$.

Exercice 15 Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I:

1) $x^7-x^2+1=0,\quad I=[-2,\ 0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x=2,\quad I=\mathbb{R}$.

3) $\tan x=\frac{3}{2}x,\quad I=]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de dichotomie (à l'aide d'une méthode de calcul de son choix).

Exercice 16 On considère la fonction $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ sur $]0,\ +\infty[$, et les suites $u_n=\frac{1}{2\pi n}$ et $v_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ définies sur $\mathbb{N}^*$. Calculer les limites de u_n, v_n, $f(u_n)$ et $f(v_n)$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to0^+}f(x)$?