Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, 2012-2013, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n 2 : Suites

Exercice 1
Ces suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Le cas échéant, préciser leur raison. Dans tous les cas, calculer leur terme général u_n.

$$a)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{\pi u_n}{\sqrt{17}} \\ u_0 = 3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n \\ u_0 = 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2 Donner l'expression du terme général des suites suivantes :
1) (t_n) suite arithmétique de raison 10 telle que $t_{1000} = 0$.
2) (u_n) suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_{10} = 118$.
2) (v_n) suite géométrique réelle telle que $v_0 = 3$ et $v_5 = -96$.
3) (w_n) une suite géométrique de raison -2 telle que $w_5 = 320$.

Exercice 3
Soient (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

pour tout n, et dont les termes initiaux sont $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
On définit la suite à valeur complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$. Pour tout n, calculer z_{n+1} en fonction de z_n et en déduire les termes généraux de (x_n) et (y_n) ainsi que les limites de ces deux suites.

Exercice 4
Les suites suivantes sont-elles majorées ? minorées ? croissantes ? décroissantes ? convergentes ?

$$a)\ u_n = (-3)^n + 3^n \qquad b)\ u_n = \frac{n+1000}{n+2012} \qquad c)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \qquad d)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Exercice 5
Parmi les énoncés suivants, déterminer et prouver ceux qui sont vrais, donner un contre exemple pour les autres.
a) Toute suite non minorée tend vers $-\infty$.
b) Toutes suite bornée est convergente.
c) Toute suite convergente est bornée.
d) Si (u_n) tend vers $l > 0$, alors (u_n) est positive ou nulle à partir d'un certain rang.
e) Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
f) Si la suite $(|u_n|)$ converge alors la suite (u_n) converge aussi.
g) Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $(|u_n|)$ converge vers la même limite.
h) Si les suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite, alors $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.
i) Si la suite (u_n) converge, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

Exercice 6
Calculer les sommes suivantes :

$$a)\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{2^k} \qquad b)\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1} \qquad c)\sum_{k=0}^{n} \frac{1+4^k}{3^k} \qquad d)\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \ , \ \forall n \geqslant 1.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.

2) Écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction des éléments de la suite (u_n), et en déduire l'expression de (u_n).

3) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \ , \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

3) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 9

1) Rappeler les limites des suites suivantes :

$$a) \ \frac{2^n}{n^3} \qquad b) \ \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \qquad c) \ \frac{2^{\log(n)}}{n^{\log(3)}} \qquad d) \ \frac{2^n}{n!}$$

2) Ces suites convergent-elles ? Si c'est la cas, donner leur limite.

$$a) \ u_n = n + \cos(n) \qquad b) \ u_n = \tfrac{4n+\sin(n)}{n^3} \qquad c) \ u_n = \tfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$d) \ u_n = \tfrac{(n+1)(2+(-1)^n)}{n+3} \qquad f) \ u_n = \tfrac{n-\log n}{n+\log n} \qquad g) \ u_n = (-1)^n + \tfrac{2}{n}$$

$$h) \ u_n = \sqrt{n-2} - \tfrac{n}{2} \qquad i) \ u_n = \tfrac{2^n}{n \log n} \qquad j) \ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$$

Exercice 10

Parmi les énoncés suivants, déterminer ceux qui sont vrais et donner un contre exemple pour les autres.

1) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) converge vers l et (v_n) est décroissante, alors (v_n) converge vers l.

2) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) croissante, (v_n) décroissante alors (u_n) et (v_n) convergent.

3) Si $u_n \leqslant v_n$, (u_n) croissante, (v_n) décroissante, et $(u_n - v_n)$ tend vers 0, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.

Exercice 11

1) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^{1000}}{1,001^n}$.

a) Déterminer la limite de u_n.

b) À l'aide d'une calculatrice, donner une approximation de u_{10}, u_{100}, u_{1000}, u_{10000}, u_{100000} et $u_{1000000}$.

2) Pour tout n entier naturel non nul, on définit v_n comme le plus petit entier naturel k tel que $k^k \geqslant n$.

a) Calculer les 10^{10} premiers termes de la suite (v_n).

b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ (indication : montrer que la suite (v_n) est croissante et non majorée).

Exercice 12

Le but de cet exercice est de définir et de calculer le nombre

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

où apparaissent une infinité de fois les symboles $\sqrt{\ }$, 1 et $+$, et uniquement ces symboles. Pour ce faire, on considère la suite (ϕ_n) définie par :

$$\begin{cases} \phi_0 = 1 \\ \phi_{n+1} = \sqrt{\phi_n + 1} \end{cases}$$

pour tout $n \geqslant 0$.

1) Écrire ϕ_n avec les symboles $\sqrt{\ }$, 1 et $+$ pour les premiers termes de la suite.
2) Montrer que la suite (ϕ_n) est croissante.
3) Montrer par récurrence sur n que $\phi_n \leqslant 2$ pour tout n.
4) En déduire que la suite (ϕ_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13

Soit a un réel et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

pour tout $n \geqslant 0$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.
2) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est nécessairement 1.
3) On suppose $a \in [0, 1]$. Montrer par récurrence que $u_n \leqslant 1$. En déduire que (u_n) est convergente.
4) On suppose $a > 1$. Montrer que (u_n) diverge.
5) On suppose $a < 0$. Calculer u_1. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 14

1) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = 0$?
2) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = 1$?
3) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = +\infty$?

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.
2) Observer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Que peut-on en déduire ?
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4) En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.