Les nombres complexes

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
$$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$
Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif
- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$
$$\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$$
Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif

Dans $\mathbb{R}$, un carré est toujours positif

L'équation $X^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine.

On appelle i une racine carrée de -1 : $\quad i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

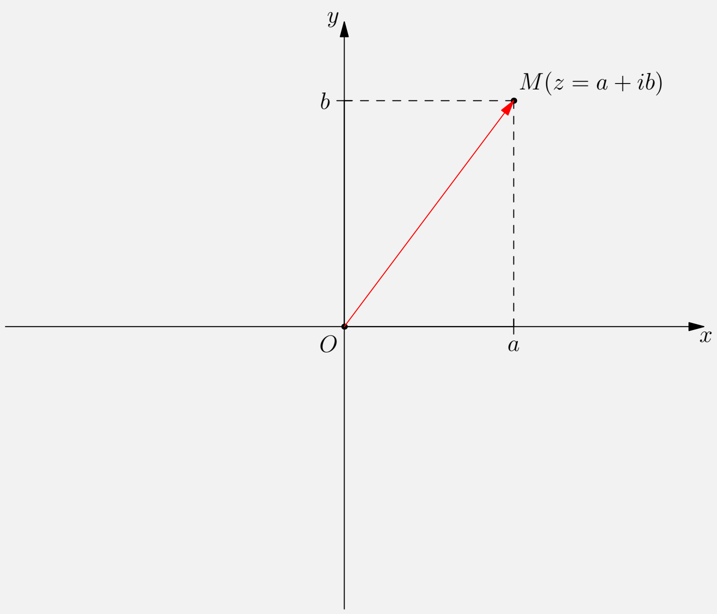
$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \quad | \quad x,\ y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

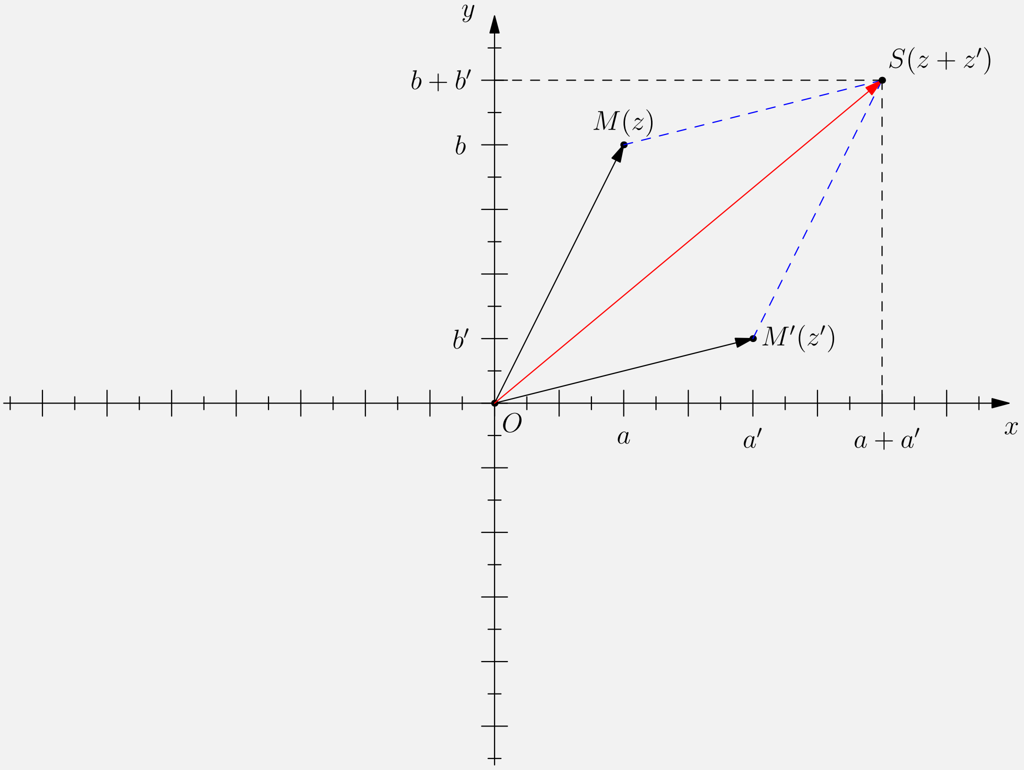
- x est la partie réelle de z, notée : $x = \Re(z)$
- y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \Im(z)$

- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$
- $x + iy = x' + iy' \quad \Leftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy).(x - iy) = x^2 + y^2$
- Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

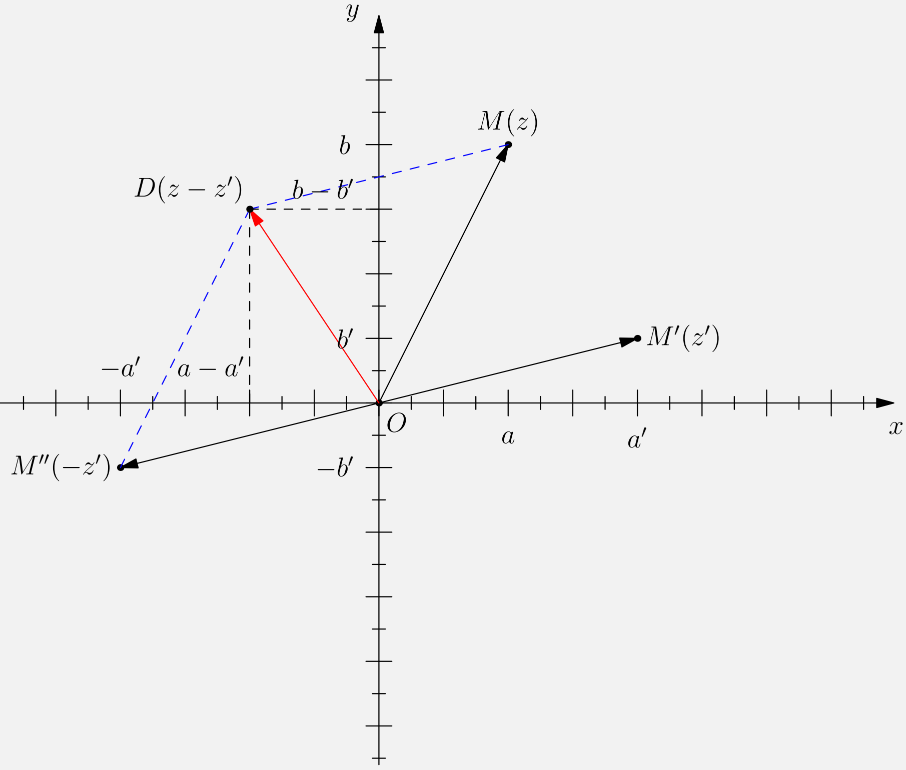
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le plan.





Les nombres complexes | Représentation de l'addition des complexes

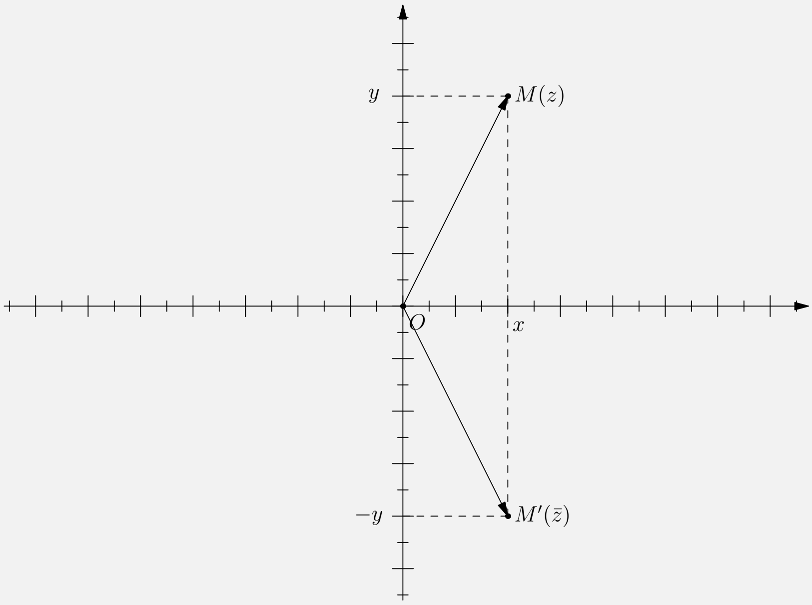


Paris Descartes | 2012 — 2013 | Mathématiques et calcul 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(\overline{z})} = z, \quad \overline{(z_1.z_2)} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

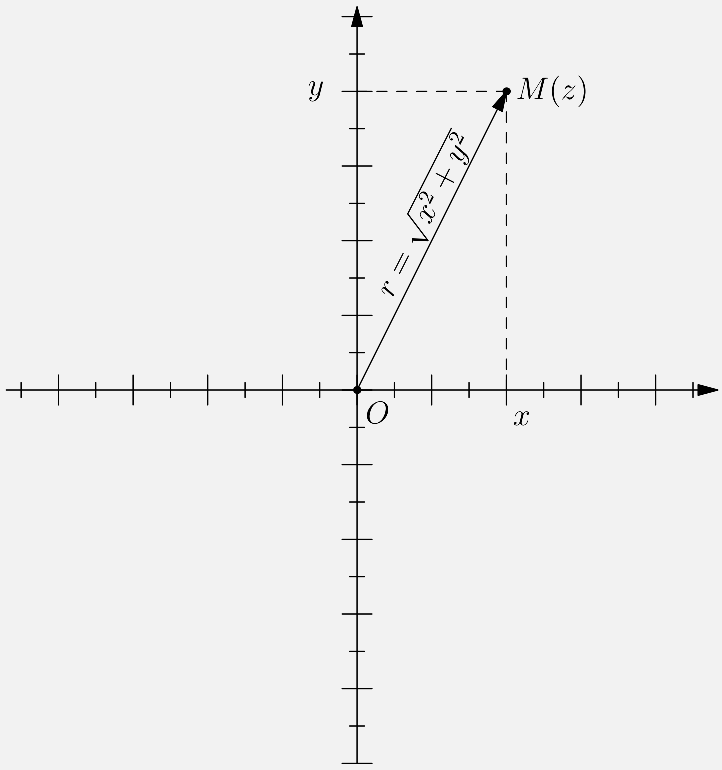
$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R}$, $(z = x)$ $\quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$
- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(z = x + iy,\ y \neq 0)$
  - $|z^2| = |(x+iy)^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$
  - $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \neq |z^2|$

Les nombres complexes Module d'un nombre complexe



Paris Descartes 2012 — 2013 Mathématiques et calcul 1

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4i$

On cherche $z = x+iy$ tel que $z^2 = 3+4i$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3+4i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array}\right.$$

D'où les deux solutions : $(x,y) = (2,1)$ et $(x,y) = (-2,-1)$

Les nombres complexes Racine carrée des nombres complexes

Pour trouver la racine d'un nombre complexe $a+ib$,

on pose : $(x+iy)^2 = a+ib$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lclc} x^2 - y^2 & = & a & (1) \\ 2xy & = & b & (2) \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{array}\right.$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2

L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y

Paris Descartes 2012 — 2013 Mathématiques et calcul 1

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les nombres complexes z, tels que $z + \frac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\frac{\Delta}{4a^2}$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :

Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

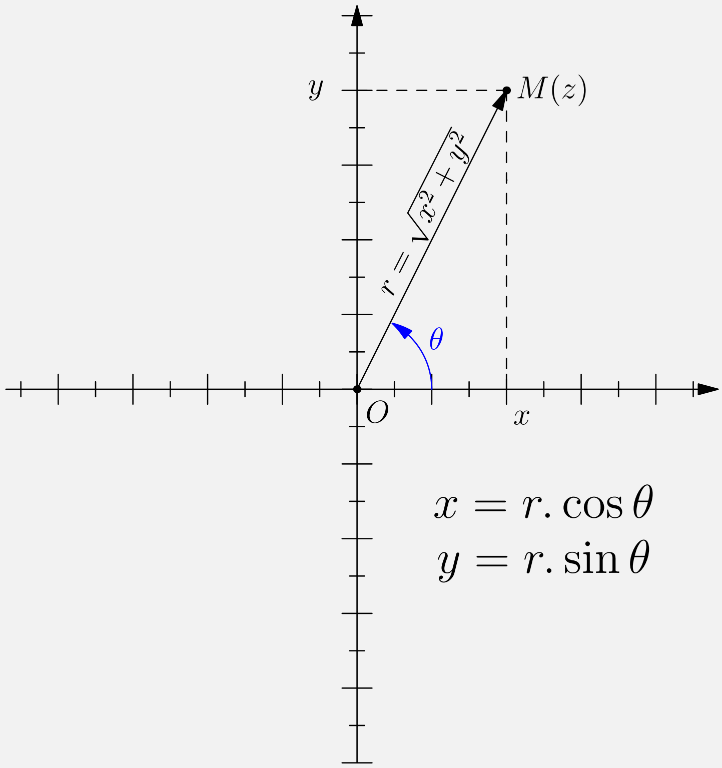
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$z = -\frac{b}{2a}$$



$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$

On appelle argument du nombre complexe $z = x + iy$, la seule solution θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Notation : $\theta = \arg(z)$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Remarque : Le choix $0 \leq \theta < 2\pi$ est un choix arbitraire, on peut tout aussi bien choisir : $-\pi \leq \theta < \pi$ ou ...

Les nombres complexes | Écriture trigonométrique des nombres complexes

Exemples

- $z = 1 + i \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
  Donc :
  $z = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$
- $z = 3 + i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
  Donc :
  $z = 2\sqrt{3}\,(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}\,(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$
- $z = 1 - i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
  Donc :
  $z = 2\,(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$

Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

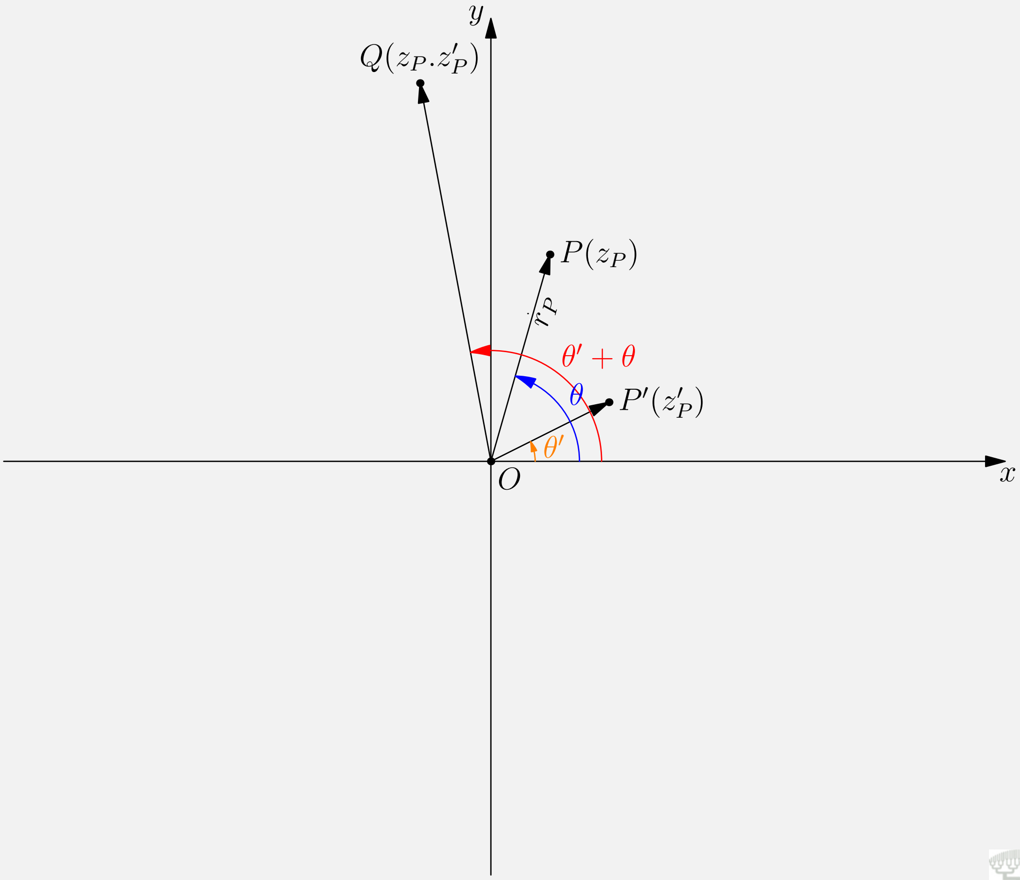
Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right]$$

$$= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On multiplie les modules
- On additionne les arguments



Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$$

$$= rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On multiplie les modules
- On additionne les arguments

Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{r.(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$\forall z \neq 0, z' \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\Big(\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)\Big)$$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On divise les modules
- On soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z.z\ldots z}_{n\text{-fois}} \\ &= \underbrace{r.r\ldots r}_{n\text{-fois}}.\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta + i\sin\theta)\ldots(\cos\theta + i\sin\theta)}_{n\text{-fois}} \\ &= r^n.\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big) \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n.z^{-n} = z^n.\left(r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)\right) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)}$$

$$= r^n.\left(\cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)\right)$$

$$= r^n.\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Formule de De Moivre :

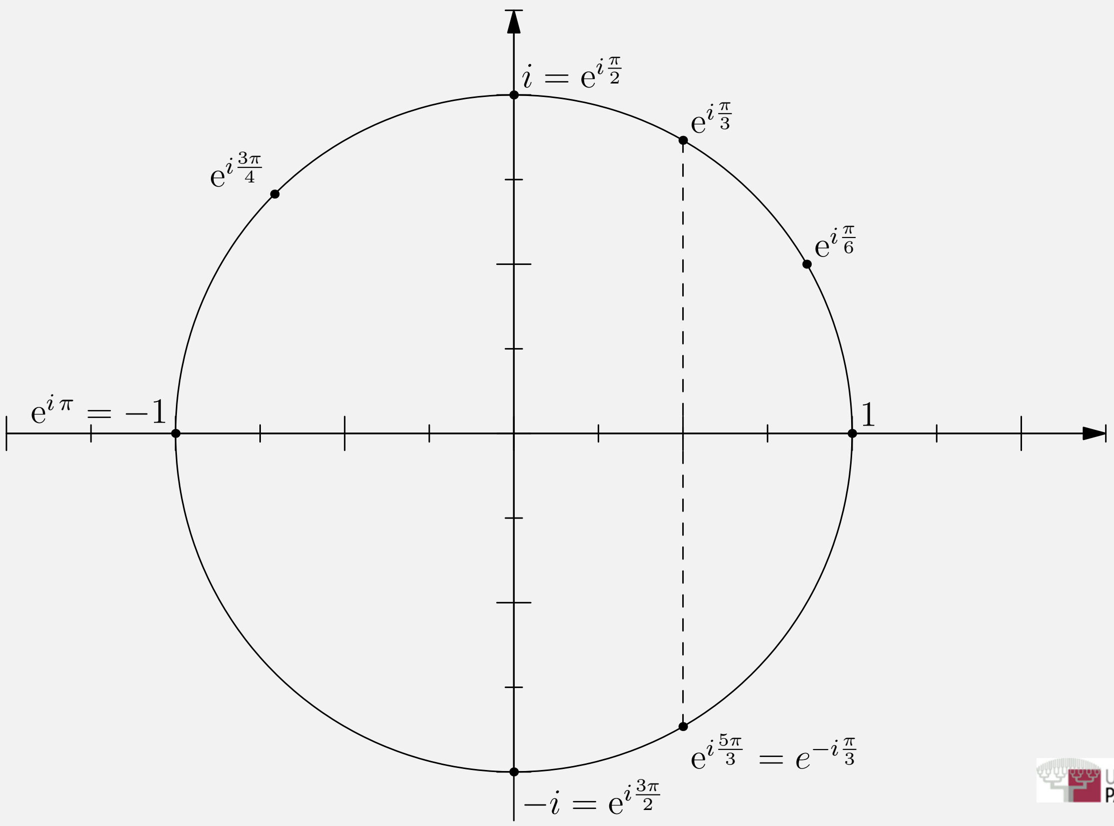
$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

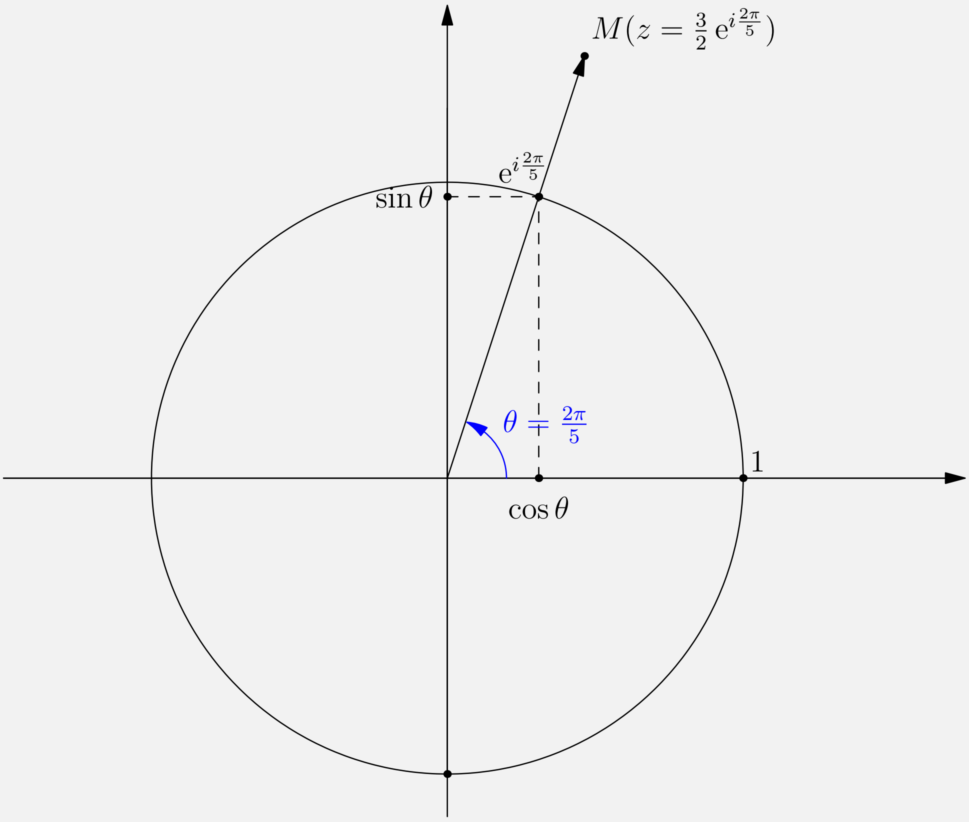
Théorème : Il existe une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ (notée e^z $\forall z \in \mathbb{C}$) qui vérifie :

1. $\forall z,\ z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$
2. Si $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^x$ est l'exponentielle réelle
3. L'application : $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longmapsto & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est une bijection sur l'ensemble des complexes de module 1

Théorème admis

Les nombres complexes de module 1





Les nombres complexes Exponentielle complexe

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + i\,y, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Paris Descartes 2012 — 2013 Mathématiques et calcul 1

Racine *n-ième* d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine *n-ième* de z, le nombre complexe :

$$a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tel que :

$$z = a^n$$

Les nombres complexes Racines des nombres complexes

$$z = a^n$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varrho^n & = & r \\ n\alpha & = & \theta + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \varrho & = & \sqrt[n]{r} \\ \alpha & = & \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{array}\right.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leq k \leq n-1$

Paris Descartes 2012 — 2013 Mathématiques et calcul 1

Théorème : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non-nul, a n racines *n-ièmes* :

$$a_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big)$$
$$0 \le k \le n-1$$

Racines *n-ièmes* de l'unité

Si $z = 1$: $\quad r = 1, \quad \theta = 0.$

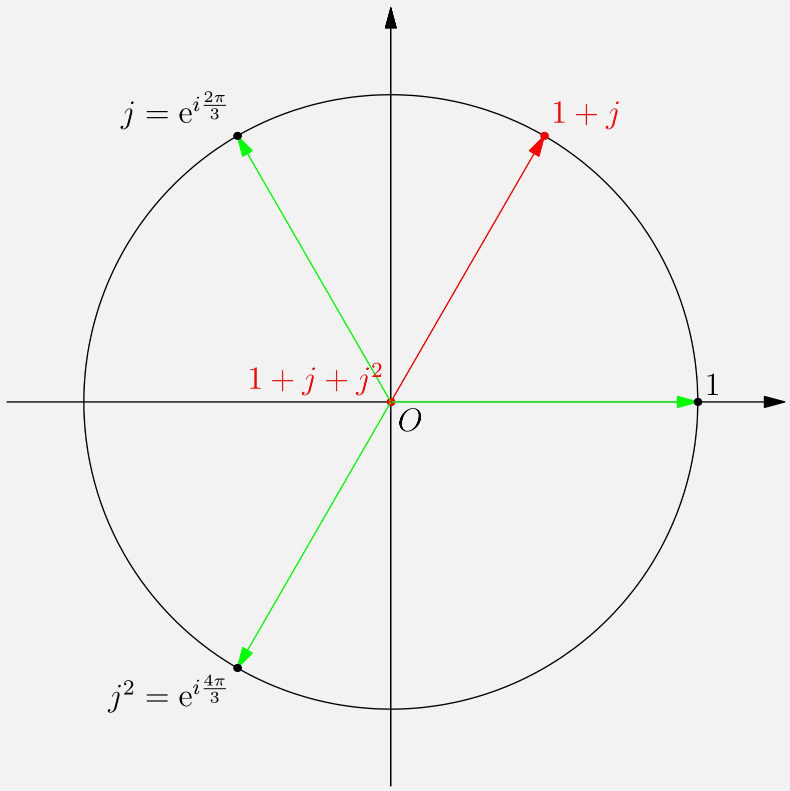
Les nombres complexes :

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$
$$0 \le k \le n-1$$

s'appellent les racines *n-ièmes* de l'unité.

$$\text{Pour } 0 \le k \le n-1, \quad \omega_k^n = 1$$

Somme des racines *n*-ièmes de l'unité



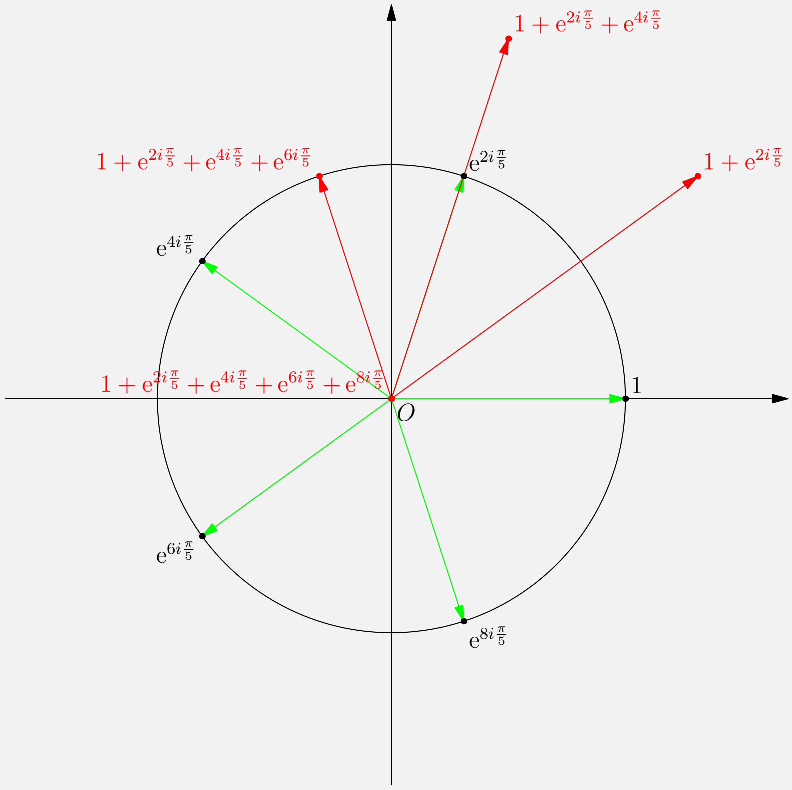
Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\,\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\,\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\,\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

La somme des racines *n-ièmes* de l'unité est nulle



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z.

$$a^n = b^n = z$$

Soit :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.\omega_k$$

Où ω_k, $(0 \leq k \leq n-1)$ est une racine *n-ièmes* de l'unité.

Théorème : On obtient les n racines *n-ièmes* d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines *n-ièmes* de l'unité.

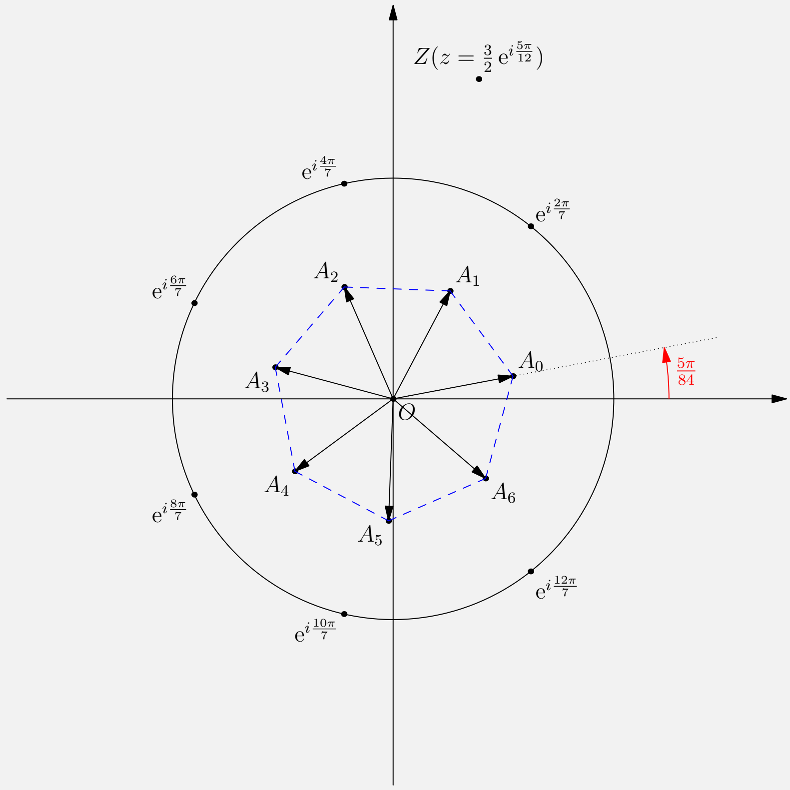
Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} \qquad a_0 = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{7\times 12}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{84}}$$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i\frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{12\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{149\pi}{84}}$



$$z \in \mathbb{C} \quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\Re(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\Im(z) = \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ.

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} 2^3\cos^3\theta &= (e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \\ &= 2\cos 3\theta+6\cos\theta \end{aligned}$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

- On écrit : $2^n\cos^n\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$
- On développe $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme
- On regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta\end{aligned}$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$\cos n\theta = \Re\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$$

$$\sin n\theta = \Im\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4\\ &= (\cos\theta)^4 + 4\,i\,(cos\theta)^3\sin\theta\\ &\quad + 6\,i^2\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4\,i^3\,(cos\theta)(\sin\theta)^3\\ &\quad + i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

$$\sin 4\theta = 4\,(cos\theta)^3\sin\theta - 4\,cos\theta(\sin\theta)^3$$

$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, a n racines complexes.