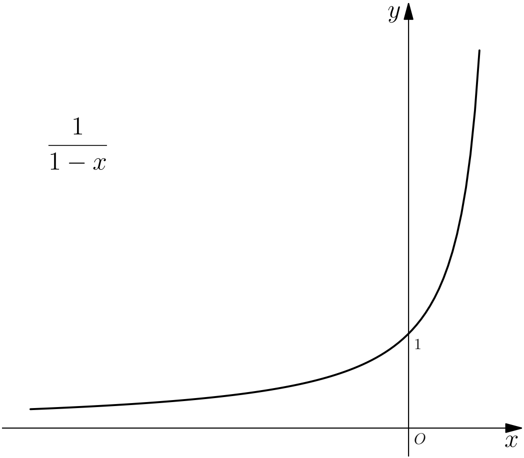
Développements limités

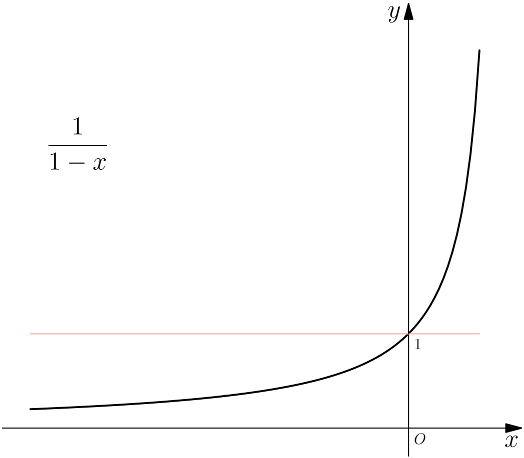
Un vieux souvenir....

Un vieux souvenir....

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} x^p = \frac{1}{1-x}$$

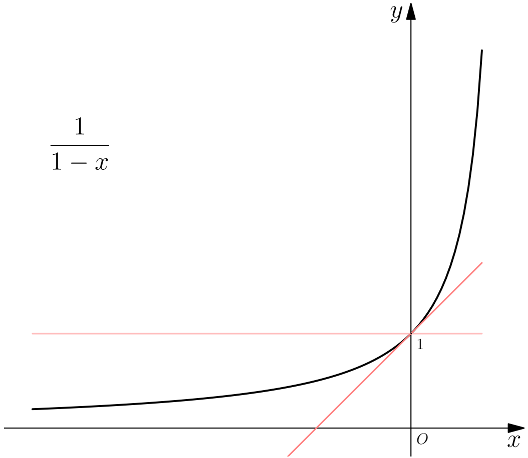

$\frac{1}{1-x}$
y
x
O
1

$$\frac{1}{1-x}$$

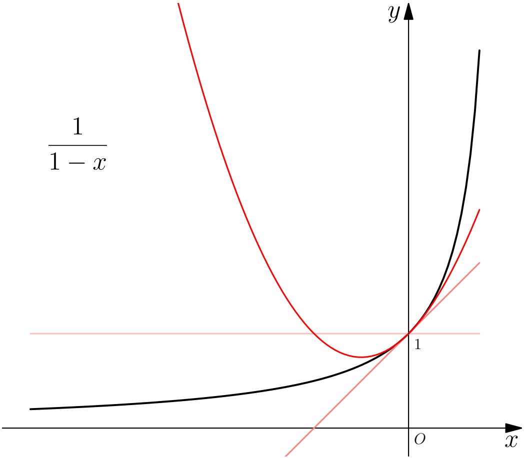


1

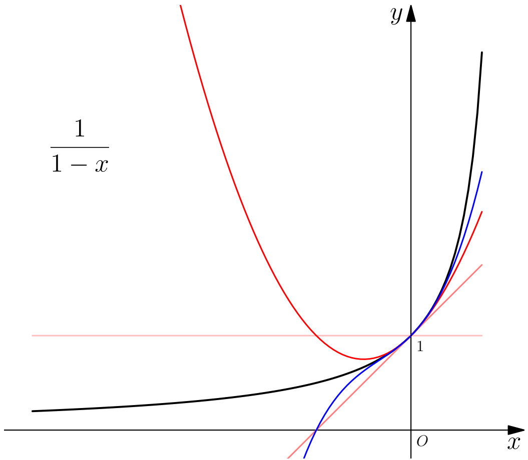
$$\frac{1}{1-x}$$



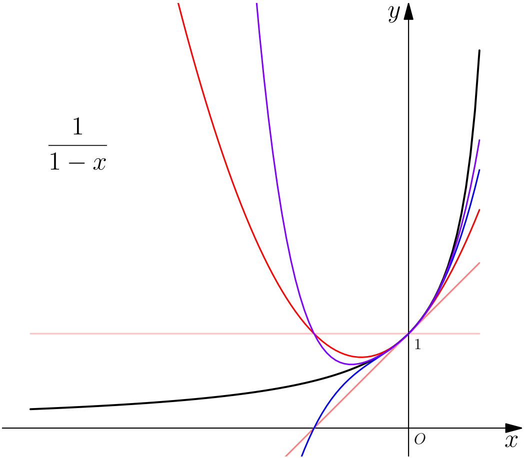
$1 + x$



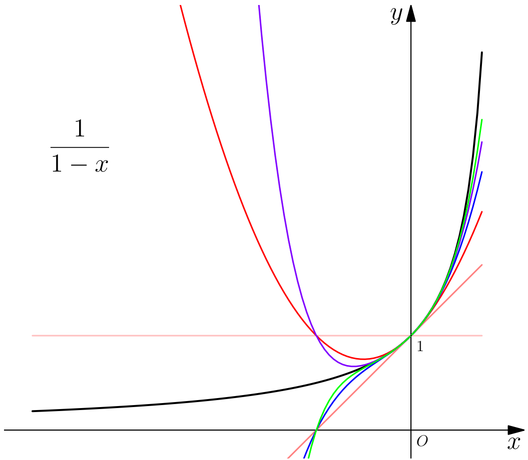
$1 + x + x^2$



$1 + x + x^2 + x^3$



$1+x+x^2+x^3+x^4$



$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{p=0}^{n} x^p$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{p=0}^{n} x^p$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{p=0}^{n} x^p$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Au voisinage de 0, si $x = 0,1$ (par exemple) :

$$f(0,1) - P_6(0,1) = \frac{(10^{-1})^7}{0,9} \leq 10^{-6}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$f(x) = (1-x)^{-1} \qquad f(0) = 1$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= (1-x)^{-2} & \qquad f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= (1-x)^{-2} & \qquad f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} & \qquad f''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= (1-x)^{-2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= 2\times 3(1-x)^{-4} & f'''(0) &= 2\times 3 \end{aligned}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^{-1} & \qquad f(0) &= 1\\
f'(x) &= (1-x)^{-2} & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= 2(1-x)^{-3} & f''(0) &= 2\\
f'''(x) &= 2\times 3(1-x)^{-4} & f'''(0) &= 2\times 3\\
f^{iv}(x) &= 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} & f^{iv}(0) &= 2\times 3\times 4
\end{aligned}
$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{array}{lll} f(x) & = & (1-x)^{-1} \\ f'(x) & = & (1-x)^{-2} \\ f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} \\ f'''(x) & = & 2\times 3(1-x)^{-4} \\ f^{iv}(x) & = & 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{lll} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 1 \\ f''(0) & = & 2 \\ f'''(0) & = & 2\times 3 \\ f^{iv}(0) & = & 2\times 3\times 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{array}{lcl lcl}
f(x) & = & (1-x)^{-1} & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & (1-x)^{-2} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} & f''(0) & = & 2 \\
f'''(x) & = & 2\times 3(1-x)^{-4} & f'''(0) & = & 2\times 3 \\
f^{iv}(x) & = & 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} & f^{iv}(0) & = & 2\times 3\times 4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^{(n)}(x) & = & 2\times\cdots\times n(1-x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) & = & n!
\end{array}$$

Les coefficients de $P_n(x)$:

$$\begin{array}{lcl lcl}
f(x) & = & (1-x)^{-1} & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & (1-x)^{-2} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} & f''(0) & = & 2 \\
f'''(x) & = & 2\times 3(1-x)^{-4} & f'''(0) & = & 2\times 3 \\
f^{iv}(x) & = & 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} & f^{iv}(0) & = & 2\times 3\times 4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^{(n)}(x) & = & 2\times\cdots\times n(1-x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) & = & n!
\end{array}$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Définitions : Soit n un entier. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Définitions : Soit n un entier. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose que f est $(n-1)$-fois dérivable sur I et que $f^{(n)}(a)$ existe.

Définitions : Soit n un entier. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose que f est $(n-1)$-fois dérivable sur I et que $f^{(n)}(a)$ existe.

On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Définitions : Soit n un entier. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose que f est $(n-1)$-fois dérivable sur I et que $f^{(n)}(a)$ existe.

On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n de f en a, la fonction R_n, définie par :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert qui contient a.

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert qui contient a.

On note : V_a un voisinage de a.

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert qui contient a.

On note : V_a un voisinage de a.

Définition 2 : On appelle voisinage pointé de a, un voisinage de a privé du point a.

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert qui contient a.

On note : V_a un voisinage de a.

Définition 2 : On appelle voisinage pointé de a, un voisinage de a privé du point a.

On note V_a^* un voisinage pointé de a.

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a un intervalle ouvert qui contient a.

On note : V_a un voisinage de a.

Définition 2 : On appelle voisinage pointé de a, un voisinage de a privé du point a.

On note V_a^* un voisinage pointé de a.

On a : $V_a^* = V_a \setminus \{a\}$.

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage pointé de a, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in V_a^* \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage pointé de a, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in V_a^* \ : \ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

On note : $f(x) = \circ(g)$

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage pointé de a, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in V_a^* \ :\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

On note : $f(x) = \circ(g)$

Si g ne s'annule pas sur V_a^* :

$$f(x) = \circ(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, s'il existe un polynôme P_n, de degré n, tel que le reste :

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, s'il existe un polynôme P_n, de degré n, tel que le reste :

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \circ\left((x-a)^n\right)$$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, s'il existe un polynôme P_n, de degré n, tel que le reste :
$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \circ\left((x-a)^n\right)$$

Remarque : Si on pose : $x = a + h$ et $g(h) = f(a+h)$

$$f(x) = P_n(x) + \circ\left((x-a)^n\right) \quad \Longleftrightarrow \quad g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + \circ(h)^n$$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, s'il existe un polynôme P_n, de degré n, tel que le reste :

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \circ\Big((x-a)^n\Big)$$

Remarque : Si on pose : $x = a + h$ et $g(h) = f(a+h)$

$$f(x) = P_n(x) + \circ\Big((x-a)^n\Big) \quad \Leftrightarrow \quad g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + \circ(h)^n$$

L'étude des développements limités en 0 est suffisante

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons : $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons : $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons : $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad |x| \leq \alpha, \quad |P_n(x) - Q_n(x)| \leq \varepsilon |x^n|$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons : $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad |x| \leq \alpha, \quad |P_n(x) - Q_n(x)| \leq \varepsilon |x^n| \quad \Rightarrow \quad P_n(0) - Q_n(0) = 0$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage pointé de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons : $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad |x| \leq \alpha, \quad |P_n(x) - Q_n(x)| \leq \varepsilon |x^n| \quad \Rightarrow \quad P_n(0) - Q_n(0) = 0$

Par récurrence, tous les coefficients de $P_n - Q_n$ sont nuls et $P_n = Q_n$.

Théorème : Soit n un entier et V_0 un voisinage de 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur V_0 dont la dérivée n-ième existe en 0.

Théorème : Soit n un entier et V_0 un voisinage de 0.
Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur V_0 dont la dérivée n-ième existe en 0.

Le reste de Taylor de f en 0 :

$$R_n(x) = f(x) - \left(\frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

est négligeable devant x^n

Théorème : Soit n un entier et V_0 un voisinage de 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur V_0 dont la dérivée n-ième existe en 0.

Le reste de Taylor de f en 0 :

$$R_n(x) = f(x) - \left(\frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

est négligeable devant x^n :

$$R_n(x) = \circ(x^n)$$

Par récurrence :

Rappel

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose : $\begin{cases} \alpha(h) & = & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) & = & 0 \end{cases}$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$$

Donc : si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+h) & = & f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h) \\ \text{Et} \ : \ \lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) & = & 0 \end{array}$$

Par récurrence :

1. Pour $n = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x} = 0$$

Par récurrence :

1. Pour $n = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x} = 0$$

   Soit :

$$f(x) - f(0) - xf'(0) = R_1(x) = \circ(x)$$

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$ (H.R.)

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n - 1$ (H.R.)

$$R_{n-1}(x) = \circ(x^{n-1})$$

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$ (H.R.)
   Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$ (H.R.)
   Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n

(Soit n un entier et V_0 un voisinage de 0.
Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur V_0 dont la dérivée n-ième existe en 0.)

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$ (H.R.)

   Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n

   Alors f' vérifie les hypothèses à l'ordre $n-1$ et le polynôme de Taylor de f' est la dérivée du polynôme de Taylor de f :

$$\left(f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)'=f'(0)+\frac{(f')'(0)}{1!}x+\frac{(f')''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

2. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$ (H.R.)

Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n

Alors f' vérifie les hypothèses à l'ordre $n-1$ et le polynôme de Taylor de f' est la dérivée du polynôme de Taylor de f :

$$\left(f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)'=f'(0)+\frac{(f')'(0)}{1!}x+\frac{(f')''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

H.R. :

$$R_n'(x)=f'(x)-P_n'(x)=\circ(x^{n-1})$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left| \dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}} \right| \leq \varepsilon$

   Soit $x \in]0, \alpha]$, le T.A.F. sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$:

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\frac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

   Soit $x \in]0, \alpha]$, le T.A.F. sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$:

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

$$\left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\frac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

Soit $x \in]0, \alpha]$, le T.A.F. sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$:

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

$$\left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad R_n(x) = \circ(x^n)$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

Soit $x \in]0, \alpha]$, le T.A.F. sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$:

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

$$\left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(x) = \circ(x^n)$$

Le raisonnement est le même si $x \in [-\alpha, 0[$.

Théorème : Soit n un entier et V_0 un voisinage de 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur V_0 dont la dérivée n-ième existe en 0.

Le reste de Taylor de f en 0 :

$$R_n(x) = f(x) - \left(\frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

est négligeable devant x^n :

$$R_n(x) = \circ(x^n)$$

Corollaire : Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un voisinage V_0 de 0.

Corollaire : Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un voisinage V_0 de 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité d'ordre n en 0.

Définition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage V_a d'un point a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si : $f - g$ est négligeable devant g.

Définition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage V_a d'un point a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si : $f - g$ est négligeable devant g.

Notation : $f \underset{a}{\sim} g$

Définition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage V_a d'un point a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si : $f - g$ est négligeable devant g.

Notation : $f \underset{a}{\sim} g$

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f - g = \circ(g)$$

Proposition : Si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie dans un voisinage pointé de a et si g ne s'annule pas sur V_a, alors $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

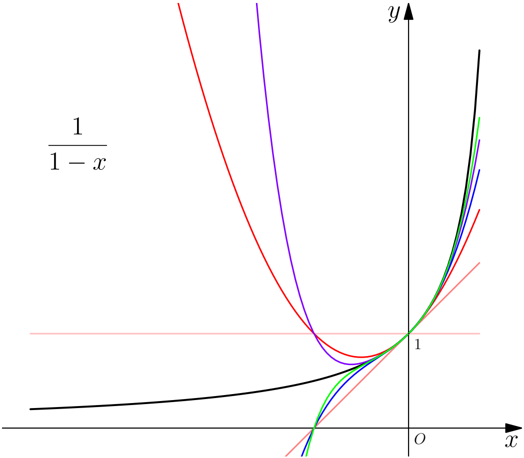
Proposition : Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n) \quad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors : $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$

- $f(x) = (1-x)^{-1}$

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$



$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \circ(x^5)$$

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

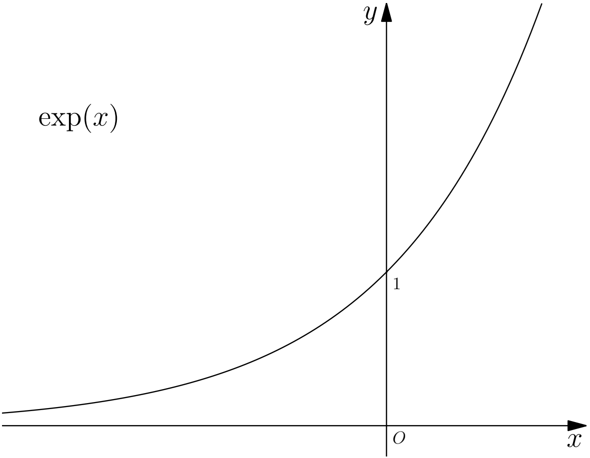
- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$
  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = e^x$

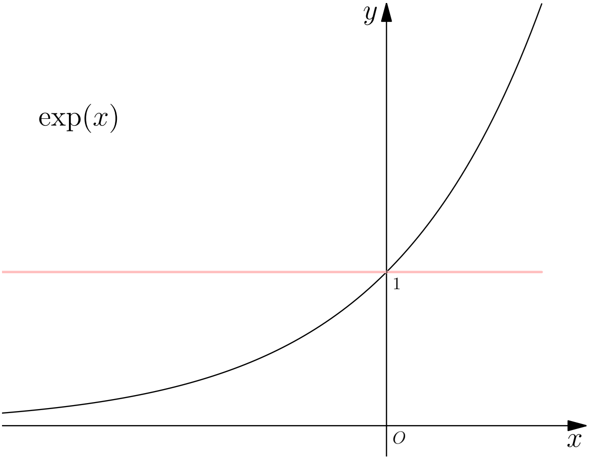
- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$
  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \forall n,\ f^{(n)}(0) = 1$$

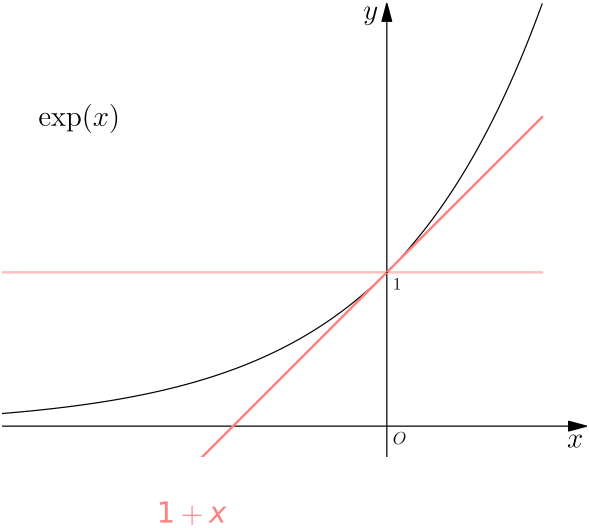
- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^\alpha$
  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \circ(x^n)$
- $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$

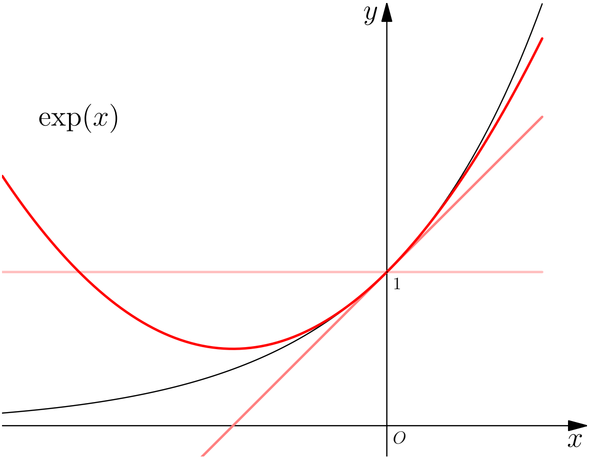
$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \forall n,\ f^{(n)}(0) = 1$$


exp(x)
y
1
O
x

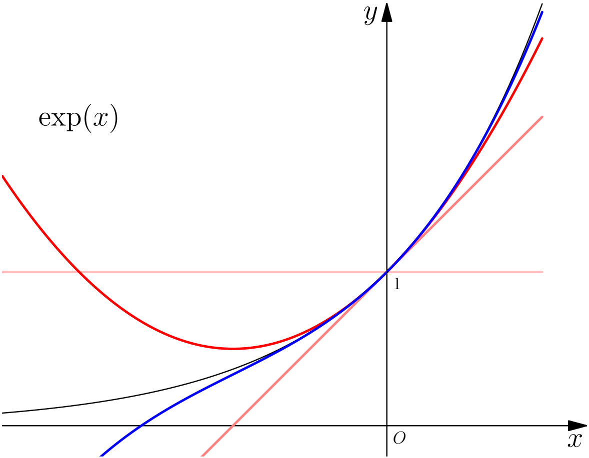


1

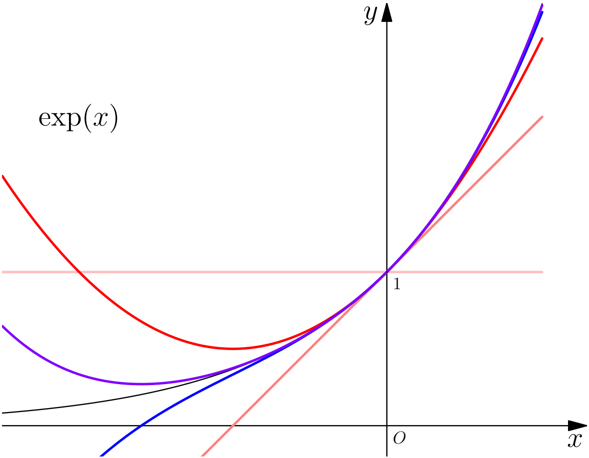

y
$\exp(x)$
1
O
x
$1 + x$



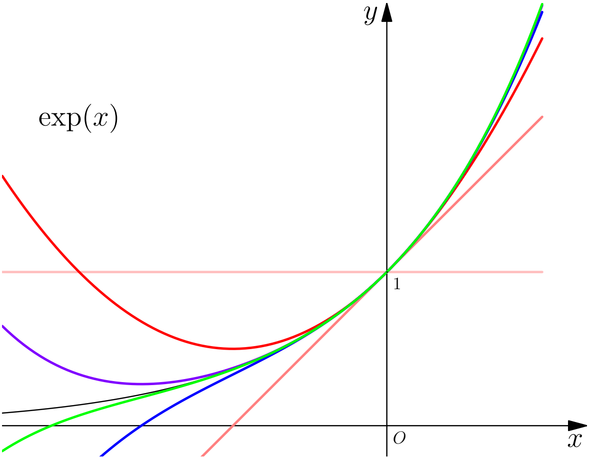
$1 + x + \frac{x^2}{2!}$



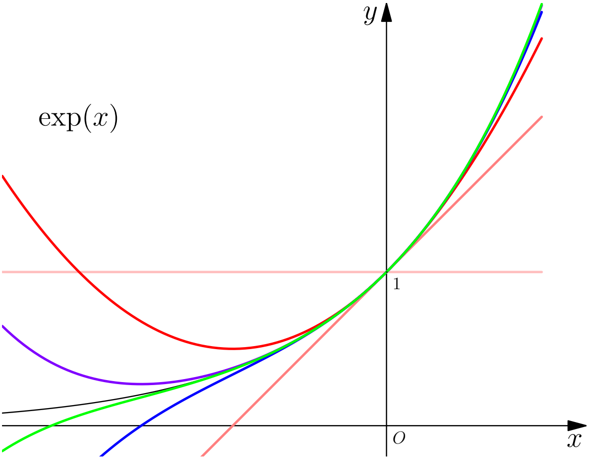
$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$



$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$



$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$



$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

- $f(x) = \sin x$

- $f(x) = \sin x$

$$\sin' x = \cos x \quad \sin'' x = -\sin x \quad \sin''' x = -\cos x$$
$$\sin^{(4)} x = \sin x \quad \cdots$$

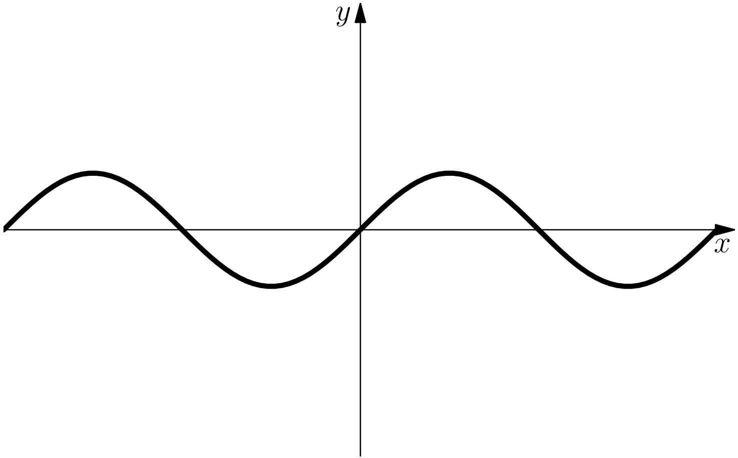
- $f(x) = \sin x$

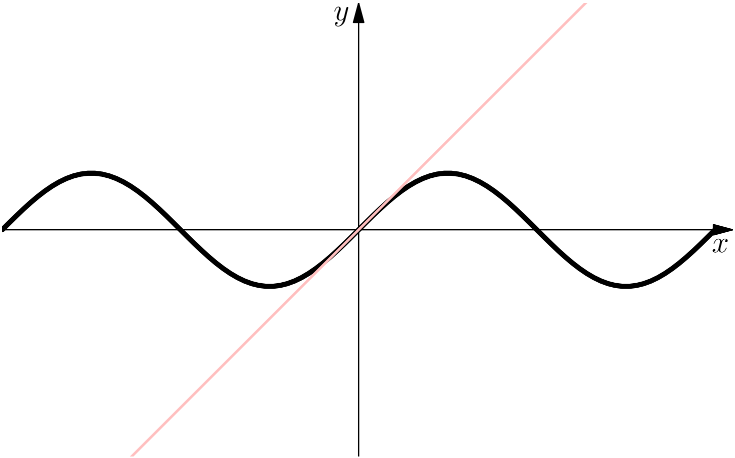
$\sin' x = \cos x \quad \sin'' x = -\sin x \quad \sin''' x = -\cos x$
$\sin^{(4)} x = \sin x \quad \cdots$
La période de dérivation du sinus est donc 4

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$

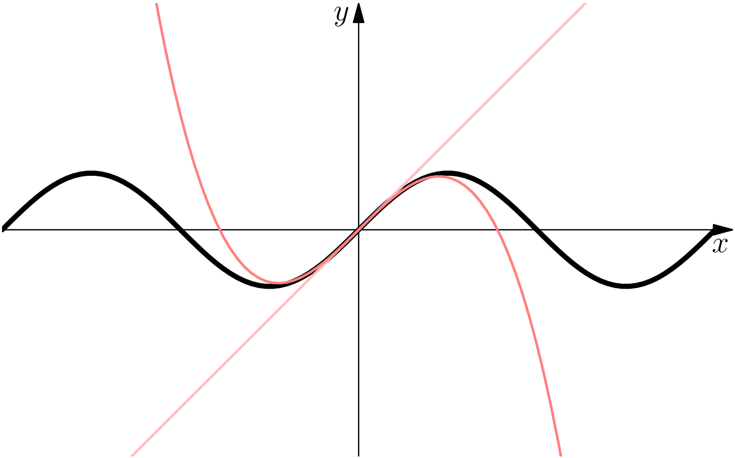
$\sin' x = \cos x \quad \sin'' x = -\sin x \quad \sin''' x = -\cos x$
$\sin^{(4)} x = \sin x \quad \cdots$
La période de dérivation du sinus est donc 4

$$\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4k \\ 1 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ -1 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

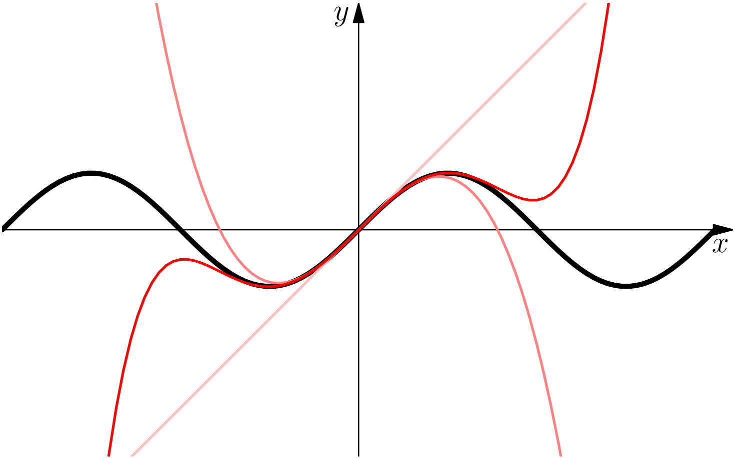

y
x



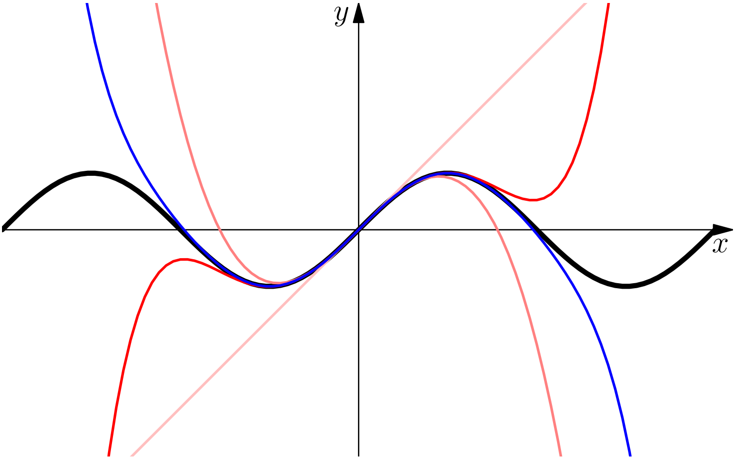
x



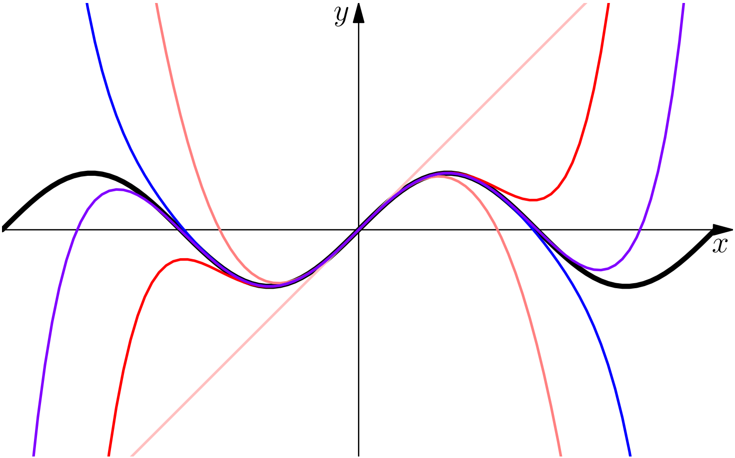
$x - \frac{x^3}{3!}$



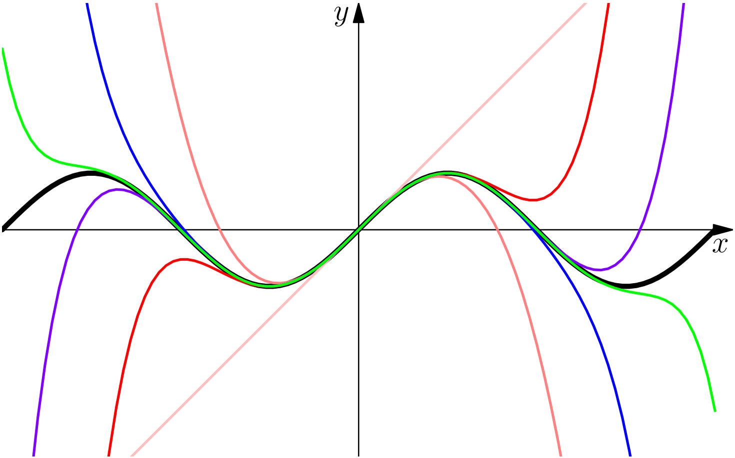
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



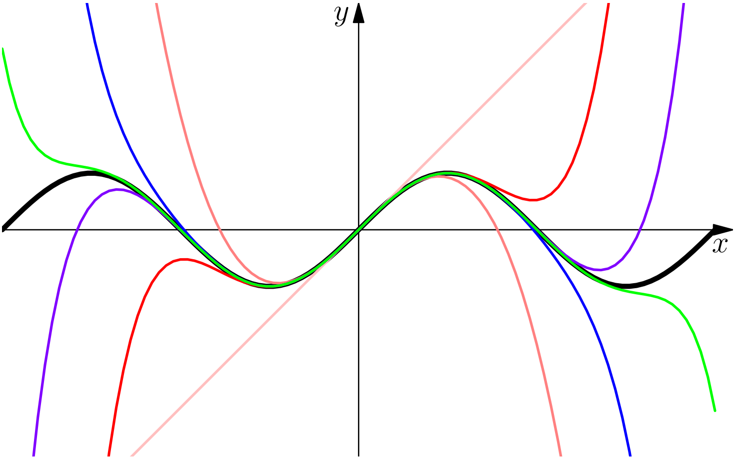
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$



$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$



$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \circ(x^{11})$$

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
- $f(x) = \cos x$

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
- $f(x) = \cos x$

$\cos' x = -\sin x \quad \cos'' x = -\cos x \quad \cos''' x = \sin x$
$\cos^{(4)} x = -\sin x \quad \cdots$

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
- $f(x) = \cos x$

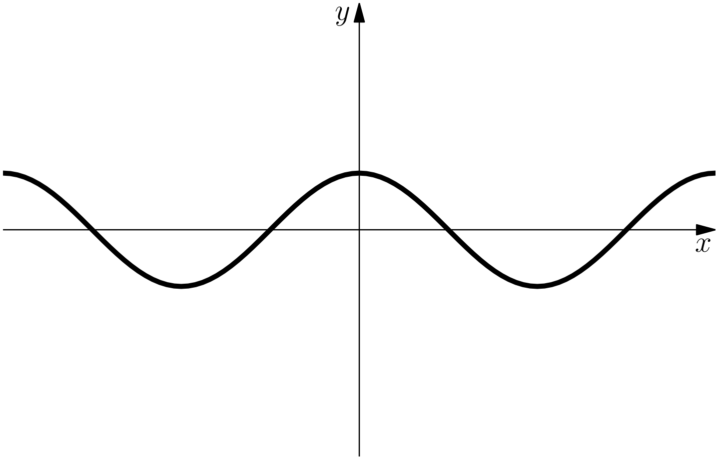
$\cos' x = -\sin x \quad \cos'' x = -\cos x \quad \cos''' x = \sin x$
$\cos^{(4)} x = -\sin x \quad \cdots$
La période de dérivation du cosinus est donc 4

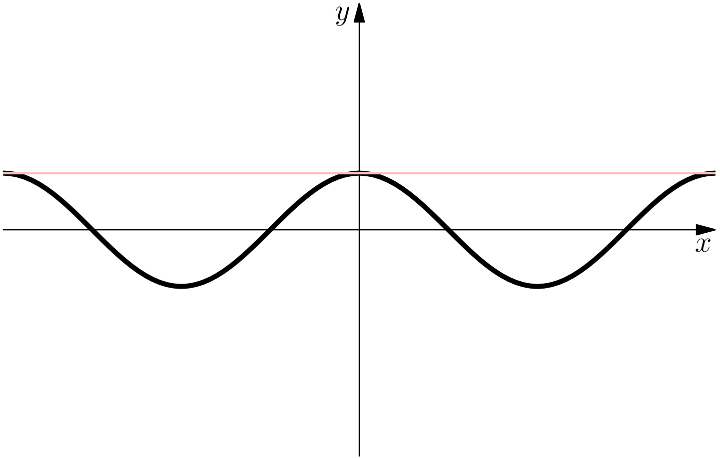
- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
- $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$

$\cos' x = -\sin x \quad \cos'' x = -\cos x \quad \cos''' x = \sin x$
$\cos^{(4)} x = -\sin x \quad \cdots$

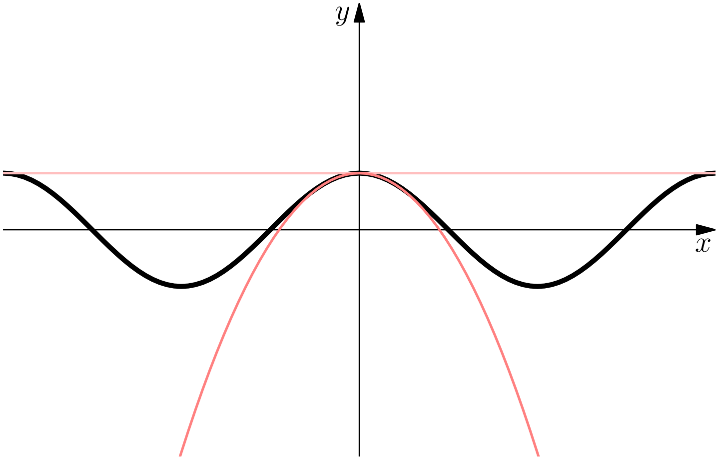
La période de dérivation du cosinus est donc 4

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 4k \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ -1 & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

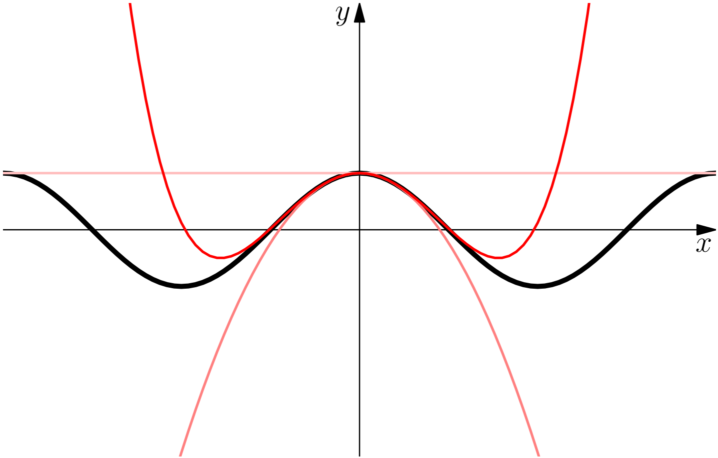

y
x



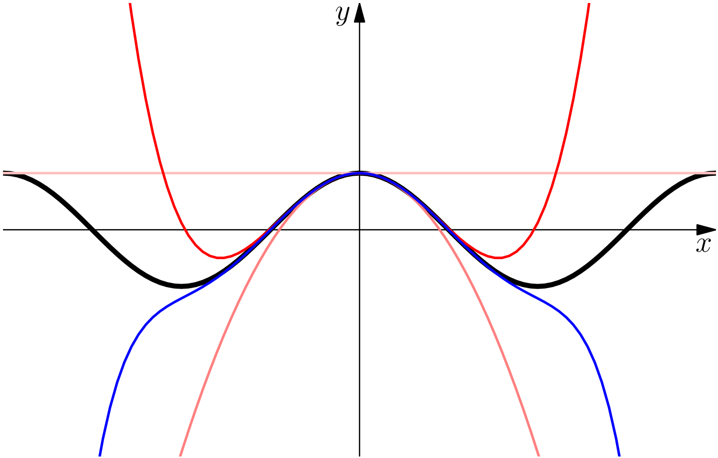
1



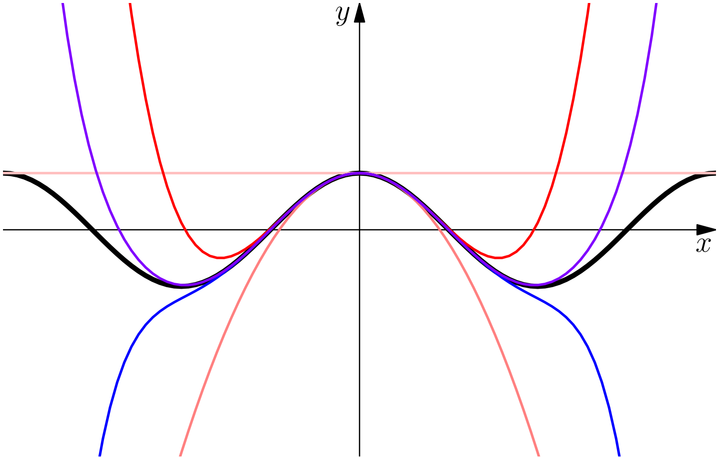
$1 - \frac{x^2}{2!}$



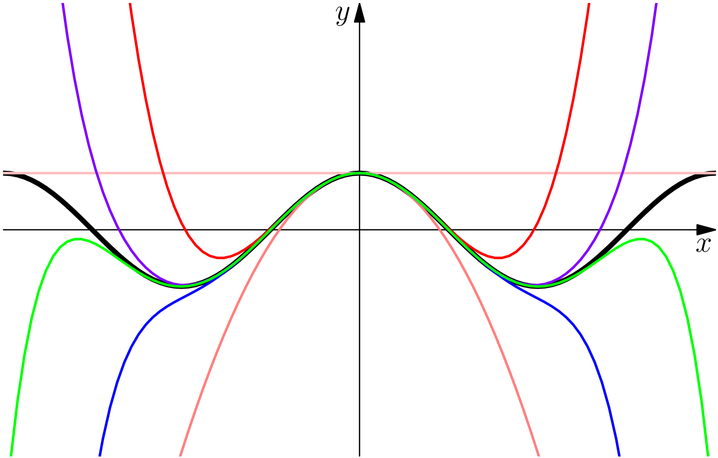
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$



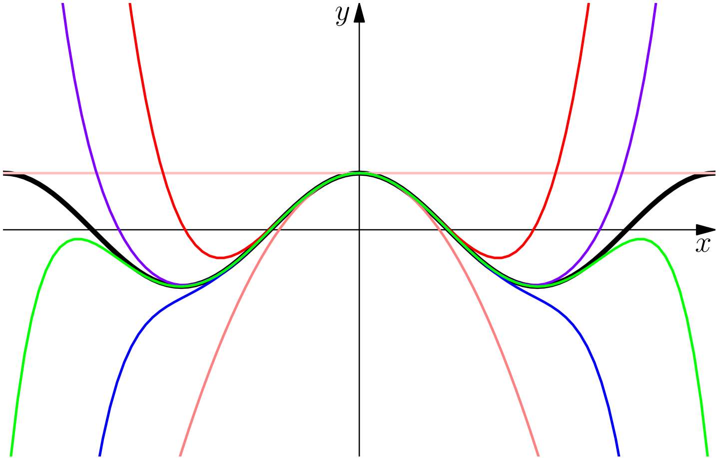
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$



$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$



$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$



$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \circ(x^{10})$$

Opérations sur les développements limités

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Somme : $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est le somme de ceux de f et g.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Somme : $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est le somme de ceux de f et g.

Produit : fg admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Somme : $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est le somme de ceux de f et g.

Produit : fg admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.

Composition : si $g(0)=0$, $f \circ g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $P_n \circ Q_n$.

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Somme :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x) + g(x) - Q_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Somme :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_n(x)+g(x)-Q_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_n(x)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-Q_n(x)}{x^n} = 0$$

Donc :

$$f(x)+g(x) = P_n(x)+Q_n(x)+\circ(x^n)$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

- φbornée au voisinage de 0 $\quad \exists M, \forall x \in I \ni 0 \quad |\varphi(x)| \leq M$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

- φbornée au voisinage de 0 $\quad \exists M, \forall x \in I \ni 0 \quad |\varphi(x)| \leq M$
- ψ négligeable devant x^n en 0 $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

- φbornée au voisinage de 0 $\quad \exists M, \forall x \in I \ni 0 \quad |\varphi(x)| \leq M$
- ψ négligeable devant x^n en 0 $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$
- $\dfrac{|\varphi(x)\psi(x)|}{|x^n|}$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

- φ bornée au voisinage de 0 $\quad \exists M, \forall x \in I \ni 0 \quad |\varphi(x)| \leq M$
- ψ négligeable devant x^n en 0 $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$
- $\dfrac{|\varphi(x)\psi(x)|}{|x^n|} \leq M \dfrac{|\psi(x)|}{|x^n|}$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

Proposition : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et ψ une fonction négligeable devant x^n en 0, la fonction produit : $\varphi\psi$ est négligeable devant x^n en 0.

- φbornée au voisinage de 0 $\quad \exists M, \forall x \in I \ni 0 \quad |\varphi(x)| \leq M$
- ψ négligeable devant x^n en 0 $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$
- $\dfrac{|\varphi(x)\psi(x)|}{|x^n|} \leq M \dfrac{|\psi(x)|}{|x^n|} \to 0$ si $x \to 0$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 :

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 : $\quad \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) = \circ(x^n)$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 : $\quad \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) = \circ(x^n)$

$$d^\circ\big(P_n(x)Q_n(x)\big) = 2n \quad \Rightarrow \quad P_n(x)Q_n(x) = H_n(x) + x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 : $\quad \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) = \circ(x^n)$

$d^\circ\big(P_n(x)Q_n(x)\big) = 2n \quad \Rightarrow \quad P_n(x)Q_n(x) = H_n(x) + x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})}{x^n} = 0$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(P_n(x) + \circ(x^n)\right)\left(Q_n(x) + \circ(x^n)\right) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \left(P_n(x) + Q_n(x)\right)\left(\circ(x^n)\right) + \left(\circ(x^n)\right)\left(\circ(x^n)\right) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 : $\left(P_n(x) + Q_n(x)\right)\left(\circ(x^n)\right) = \circ(x^n)$

$$d^\circ\left(P_n(x)Q_n(x)\right) = 2n \quad \Rightarrow \quad P_n(x)Q_n(x) = H_n(x) + x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})}{x^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1}) = \circ(x^n)$$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + \circ(x^n)\big)\big(Q_n(x) + \circ(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) + \big(\circ(x^n)\big)\big(\circ(x^n)\big) \end{aligned}$$

$P_n(x) + Q_n(x)$ est borné au voisinage de 0 : $\quad \big(P_n(x) + Q_n(x)\big)\big(\circ(x^n)\big) = \circ(x^n)$

$d^\circ\big(P_n(x)Q_n(x)\big) = 2n \quad \Rightarrow \quad P_n(x)Q_n(x) = H_n(x) + x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}(a_{n+1}+\cdots+a_{2n}x^{2n-n-1})}{x^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{n+1}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n-n-1}) = \circ(x^n)$

Donc :

$$f(x)g(x) = H_n(x) + \circ(x^n)$$

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Somme : $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est le somme de ceux de f et g.

Produit : fg admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit $P_n Q_n$.

Composition : si $g(0) = 0$, $f \circ g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $P_n \circ Q_n$.

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
e^{x} & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2!} & + & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{x^n}{n!} & + \circ(x^n) \\
e^{-x} & = & 1 & - & x & + & \frac{x^2}{2!} & - & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{(-1)^n x^n}{n!} & + \circ(x^n)
\end{array}
$$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2!} & + & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{x^n}{n!} & + \circ(x^n) \\
e^{-x} & = & 1 & - & x & + & \frac{x^2}{2!} & - & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{(-1)^n x^n}{n!} & + \circ(x^n)
\end{array}
$$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$
- $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$
- $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
e^x & = & 1 & + & x & + & \dfrac{x^2}{2!} & + & \dfrac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \dfrac{x^n}{n!} & + \circ(x^n) \\
e^{-x} & = & 1 & - & x & + & \dfrac{x^2}{2!} & - & \dfrac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} & + \circ(x^n)
\end{array}
$$

- $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$
- $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n) \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \circ(x^n) \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur I et dont la dérivée n-ième existe en 0.

Soit P_n le polynôme de Taylor de f en 0 et R_n son reste.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur I et dont la dérivée n-ième existe en 0.

Soit P_n le polynôme de Taylor de f en 0 et R_n son reste.

Toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0.

Soit f une fonction $n-1$-fois dérivable sur I et dont la dérivée n-ième existe en 0.

Soit P_n le polynôme de Taylor de f en 0 et R_n son reste.

Toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.

Admis sans démonstration.

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$
$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \circ(x^{2n})$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \circ(x^{2n})$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 2\times 2!}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 2\times 2\times 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 2\times\cdots\times 2\times n!}x^n + \circ(x^n)$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times3}{2\times2\times2!}x^2 - \frac{1\times3\times5}{2\times2\times2\times3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times2\times\cdots\times2\times n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times3}{2\times4}x^2 - \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times2n}x^n + \circ(x^n)$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 2\times 2!}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 2\times 2\times 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 2\times\cdots\times 2\times n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^4 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^6 + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^{2n} + \circ(x^{2n})$$

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$
- $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$
- $\arcsin = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 2\times 2!}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 2\times 2\times 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 2\times\cdots\times 2\times n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^4 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^6 + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^{2n} + \circ(x^{2n})$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Quelques exemples

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\circ(x^{n})$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n} + \circ(x^{n})$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^{2}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\circ(x^{n})$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}} = 2-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2^6}x^4+\circ(x^4)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{2^7}x^4+\circ(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}} = 2-\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{5}{2^6}x^4+\circ(x^4)$$

$$\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2-\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{5}{2^6}x^4+\circ(x^4)\right)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$

$$\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)$$
$$= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right) \\
&= \ln\left(2(1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)
\end{aligned}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\begin{aligned}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)\\ &= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)$$
$$= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)$$
$$= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)$$
$$=$$
$$\ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^3}{3} + \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^4}{4} + \circ(x^4)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\begin{aligned}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)\\ &= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)\\ &=\end{aligned}$$
$$\ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^3}{3} + \circ(x^4)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right) \\
&= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right) \\
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^2}{2} + \circ(x^4)
\end{aligned}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\begin{aligned}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)\\ &= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)\\ &= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2)^2}{2} + \circ(x^4)\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)\\
&= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)\\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)\\
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2)^2}{2} + \circ(x^4)\\
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \tfrac{1}{2^7}x^4 + \circ(x^4)
\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)$$
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)$$
$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + \circ(x^4)\right)\\
&= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4))\right)\\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\right)\\
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2)^2}{2} + \circ(x^4)\\
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \tfrac{1}{2^7}x^4 + \circ(x^4)\\
&= \ln(2) - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{3}{2^6}x^4 + \circ(x^4)
\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\begin{aligned}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x = \left(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\begin{aligned}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \circ(x^3)\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x &= \left(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{3} + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3 + \circ(x^3)\\
&= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^3 + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

$(1+x)^{\alpha}$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ $\quad u$ est au voisinage de 0.

$(1+x)^{\alpha}$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ u est au voisinage de 0.

$(1+x)^{\alpha} = (2+u)^{\alpha}$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ u est au voisinage de 0.

$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha$

$$(1+v)^\alpha = 1 + \alpha v + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}v^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}v^n + \circ(v^n)$$

$(1+x)^{\alpha}$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ $\quad u$ est au voisinage de 0.

$(1+x)^{\alpha} = (2+u)^{\alpha} = 2^{\alpha}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{\alpha}$

$$(1+v)^{\alpha} = 1 + \alpha v + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}v^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}v^n + \circ(v^n)$$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ $\quad$ u est au voisinage de 0.

$$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha$$
$$\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha\frac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^n + \circ(u^n)$$

$$(1+v)^\alpha = 1 + \alpha v + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}v^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}v^n + \circ(v^n)$$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ u est au voisinage de 0.

$$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha \left(1 + \frac{u}{2}\right)^\alpha$$
$$\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha\frac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^n + \circ(u^n)$$

$u = x - 1$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ u est au voisinage de 0.

$$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha \left(1 + \tfrac{u}{2}\right)^\alpha$$
$$\left(1 + \tfrac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha\tfrac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\tfrac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\tfrac{u}{2}\right)^n + \circ(u^n)$$

$u = x - 1$
$$(1+x)^\alpha = 2^\alpha \left(1+\alpha\frac{x-1}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \circ(x-1)^n\right)$$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1 + u$ $\quad u$ est au voisinage de 0.

$$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha$$

$$\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha\frac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^n + \circ(u^n)$$

$u = x - 1$

$$(1+x)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\alpha\frac{x-1}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \circ(x-1)^n\right)$$

$$=$$

$$2^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4.2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2^n.n!}(x-1)^n + \circ(x-1)^n\right)$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad$ $u > 0$ est au voisinage de 0.

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-v)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 - \frac{1}{16}v^3 - \frac{5}{2^7}v^4 + \circ(v^4)$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{2^7}u^8 + \circ(u^8)$$

$$(1-v)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 - \frac{1}{16}v^3 - \frac{5}{2^7}v^4 + \circ(v^4)$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{2^7}u^8 + \circ(u^8)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + \circ\left(\frac{1}{x^8}\right)$$